

Este artículo fue publicado originalmente en la Revista
Recherches en Didactique des Mathématiques
Éditions *La Pensée Sauvage*

Del cálculo ágrafo al cálculo escrito: una batalla por acceder a una nueva significación

Alicia Avila
Universidad Pedagógica Nacional
México
aliavi@prodigy.net.mx

Resumen

En México, al igual que en todos los países del tercer mundo, muchos millones de jóvenes y adultos no tuvieron acceso a la escolaridad en la infancia, hoy, según datos de la UNESCO y la CEPAL, hay 39 millones de analfabetos adultos en América Latina. Sin embargo, estas personas desarrollan en su vida conocimientos numéricos y destrezas de cálculo cargados de significado que con frecuencia alcanzan una importante sistematicidad y eficacia. Muchas de ellas, por presiones sociales o con el simple deseo de saber “lo que los otros saben”, acuden a los sistemas de alfabetización y educación básica para jóvenes y adultos que los gobiernos o asociaciones civiles implementan. El trayecto de un grupo de jóvenes que intenta aprender la aritmética escrita en el marco de un proyecto experimental, nos informa sobre la interacción entre dos tipos de saberes aritméticos: el *de la práctica* y el escolar. Se constata la pérdida de sentido al enfrentarse a las escrituras numéricas y el cómo progresivamente aquél se recupera. Se observa la presencia constante de los procedimientos de cálculo ágrafos y la necesidad de su reelaboración como condición de apropiación de la aritmética escrita. Los fenómenos observados contradicen la creencia generalizada en muchos países de que enseñar las matemáticas escolares a estos jóvenes y adultos es una tarea breve y simple.

Introducción

Es creencia (y práctica) generalizada, que la educación matemática elemental de jóvenes y adultos puede reducirse a un trayecto lineal y cortísimo con base en el cual las personas adquirirán los saberes y los códigos que constituyen la cultura “letrada”. Esta creencia tiene consecuencias: se postula que unos cuantos meses serán suficientes para la adquisición de los saberes matemáticos incluidos en la educación básica que se ofrece a este sector de población. La postura es por demás ingenua y desinformada, continúa siendo aparentemente válida gracias al menos a dos razones:

- a) muchos de los jóvenes y adultos que asisten a los servicios educativos cuentan con saberes escolares previos que les permiten ser relativamente exitosos en su nuevo trayecto de escolarización;

- b) en una sociedad que valora los grados por encima de los conocimientos y destrezas, se ofrecen certificaciones que con frecuencia no respaldan la adquisición real de éstos ni el desarrollo de habilidades de ningún tipo.

En contraposición a las creencias antes anotadas, he constatado en el transcurso de la investigación que aquí reporto que la incorporación de los jóvenes y adultos al uso significativo y funcional de la aritmética escrita es un proceso complejo. La complejidad deriva principalmente del hecho de que entran en interacción los conocimientos previos de las personas y los saberes codificados que pretenden comunicarse.

En efecto, en el terreno del cálculo, los jóvenes y adultos han elaborado conocimientos y estrategias de solución cuya lógica luego resulta enfrentada con los que circulan en el ámbito escolar. De ahí que – como ha señalado Carvalho (1997, p. 65) – valga preguntarse si “la relación entre estos dos tipos de saberes refiere a la continuidad o a la ruptura”. Este es el tema central del escrito. El objetivo es mostrar la interacción entre el conocimiento aritmético desarrollado en la práctica y el que se adquiere en el ámbito escolar durante un proceso de *alfabetización matemática*. Este encuentro es inevitable. Orlando Joia lo ha señalado con notable simplicidad: “[...] los adultos insisten en recuperar, en el aula, conceptos, procedimientos y nociones matemáticas que construyeron en el espacio cotidiano y de trabajo, independientemente de lo que sus profesores les quieren enseñar”. (Joia, 1997, p. 27).

2. Nuestras concepciones sobre el aprendizaje matemático de los jóvenes y adultos

Mi postura en relación con el aprendizaje matemático escolar de los jóvenes y adultos se sustenta en los supuestos hoy bien conocidos de las corrientes constructivistas, puesto que:

- a) Considero que el conocimiento supone una elaboración por parte del sujeto;
- b) Asumo una posición interaccionista conforme a la cual la interacción del sujeto con las situaciones problemáticas provoca conocimiento;
- c) Acepto que el conocimiento está determinado no sólo por las situaciones sino también por las estructuras cognitivas del sujeto, es decir, que la vinculación con las situaciones presentadas se hace por mediación de las características

cognoscitivas de quien aprende y los recursos intelectuales de éste determinan cómo las interpreta y enfrenta.

El conjunto de las afirmaciones anteriores, puede llevar a la conclusión de que el constructivismo del cual hablo es el estrictamente piagetano. Sin embargo, tales ideas son apenas una explicación parcial de la postura asumida. Según la aproximación que Piaget privilegió, el saber tiene su origen en la acción del sujeto sobre el objeto, en un movimiento circular entre el cognoscente y el objeto: la experiencia con el objeto modifica al sujeto y, una vez éste modificado, el objeto se modifica... Dicha posición a la vez que válida, me parece insuficiente para explicar e impulsar en los jóvenes y adultos la *apropiación* del saber matemático escolar, puesto que la interacción con otros interlocutores - según postulan las corrientes socio-constructivistas y según ha sido confirmado por algunos investigadores de la educación de jóvenes y adultos (por ejemplo Carvalho 1995) - colabora también de manera esencial en dicha *apropiación*.

Aquí conviene señalar que utilizo el término *apropiación* y no *construcción* porque considero que una tarea fundamental que enfrentan en la *educación matemática escolar* los jóvenes y adultos es apropiarse de las formas codificadas propias de la matemática escrita. Sin embargo, no se trata de una apropiación pasiva, sostengo que dicha apropiación sólo puede darse de manera significativa y funcional si ocurre una reelaboración de los saberes previos que desemboque en la construcción de nuevos significados y nuevas destrezas por parte del sujeto. Dicha reelaboración tiene lugar en la interacción con las nuevas escrituras.

En estudios previos hemos constatado que las personas que no han asistido a la escuela cuentan con un bagaje de conocimientos, procedimientos y destrezas matemáticas que han construido en su experiencia con el mundo, los cuales destacan muchas veces por su sistematicidad y funcionalidad (cf. p. ej. Mariño 1984; Avila 1989 y 1990; Carraher, Carraher y Schlieman 1991; Soto 1995; Knijnik 1996). No todas las personas han alcanzado un máximo nivel de desarrollo en el cálculo ágrafo, las exigencias de exactitud y la diversidad de los cálculos que se realizan definen la mayor o menor destreza y capacidad de generalización, pero la lógica de base que sustenta la acción de unos y otros es similar (cf. Avila 1990). Son estos conocimientos y esta lógica los que – necesariamente - los

aprendices pondrán a funcionar en su intento por interpretar y resolver las situaciones portadoras de los saberes y las simbolizaciones matemáticas propias del ámbito escolar.

Como apunté ya en la introducción, cabe la hipótesis de que estos conocimientos y formas de operar en el ámbito cotidiano, puedan constituir un obstáculo para la adquisición de los procedimientos y formas de la matemática escrita propia de la escuela, pues el *cálculo vital* y el cálculo escolar en muchos sentidos corren por vías distintas, y no son pocos los puntos en que éstas son opuestas. Valgan para apoyar lo anterior los siguientes señalamientos:

- a) en el cálculo ágrafo utilizado cotidianamente, siempre están en mente cantidades (litros, naranjas, dinero), mientras en el cálculo escrito se puede proceder sin referencia a contexto alguno.
- b) mediante cálculo ágrafo, se suma considerando primero las cifras de mayor valor relativo (primero los miles, luego los cientos...), mientras en el cálculo escrito se procede a la inversa, primero las cifras de menor valor relativo (primero las unidades, luego las decenas...);
- c) en el cálculo no escrito, se resta sin descomponer las cifras implicadas y mediante un razonamiento aditivo: “lo que falta para”, mientras que con el lápiz y papel, se descomponen los números y se resta (con la idea de quitar) primero las unidades, luego las decenas;
- d) en el cálculo ágrafo, la estimación y los indicadores del contexto juegan un rol fundamental en la ponderación y control de los resultados;
- e) en el cálculo escrito, es fácil que la significación se pierda ya que, en estricto sentido, para operar no se hacen necesarias ni la estimación ni las referencias al contexto.¹

Con base en lo anterior, considero que al transitar a las matemáticas escritas, la conservación del significado y la funcionalidad - propios de la matemática construida en *la práctica* – serán producto de la interacción entre varios elementos:

- a) las situaciones o problemas planteados;

¹ Un desarrollo de las afirmaciones anotadas en *a*, *b*, *c* y *d* puede verse en Avila, 1989, 1990 y 1997.

- b) los conocimientos previos que se activan para tratar de entender y resolver la situación;
- c) las aportaciones de los otros miembros del grupo, en las cuales se expresarán sus conocimientos previos y sus intentos de comprensión;

La interacción entre estos elementos permitirá a su vez la reelaboración de los conocimientos previos.

Sobre la base de estas ideas se elaboró un conjunto de problemas y tareas con el fin de promover la movilización de ciertos conocimientos previos y, posteriormente, el intercambio a partir de las dificultades encontradas, las estrategias utilizadas y las soluciones construidas; éste se consideró un trayecto idóneo de acercamiento significativo a la aritmética escolar. La aritmética no es sólo cálculo, empero, me he centrado en la simbolización y los procedimientos de cálculo y hay una razón para ello: coincido con Carvalho (1997, p. 66) en que “incluso si se considera que la matemática no se restringe a representaciones numéricas, la cuantificación, su representación, aunque sólo sea oral, y las operaciones que se realizan con esa cuantificación, son partes importantes del conocimiento matemático que cualquier grupo cultural desarrolla”. Aún más allá, tales elementos ocupan el espacio central en los currícula de la escolarización básica. A mi entender, la tarea fundamental en la educación de jóvenes y adultos es contribuir al uso y comprensión de dicha matemática.

Pero las diferencias entre las dos formas de calcular antes anotadas impiden suponer un tránsito por continuidad, mejoramiento y complementación de las estrategias desarrolladas en la vida, como vía posible hacia la aritmética “letrada”. Se trata más bien de reelaborar las formas de cálculo propias del pensamiento no escolarizado para acceder al escolarizado. Mi postura al respecto consiste en suponer la pertinencia de situaciones y tareas que provoquen la reelaboración de los conocimientos y nociones previas como resultado de dos cosas:

- a) las interacciones con la situaciones-problema y tareas planteadas, y
- b) la interacción y colaboración entre los miembros del grupo en torno al objetivo previsto, incluyendo las establecidas con un *interlocutor más capaz*: el conductor del proceso de aprendizaje.

En los siguientes apartados se analiza el trayecto delineado al poner a prueba estas ideas y los fenómenos en él observados.

3. Condiciones y alcances de la investigación

1. Objetivos de la investigación

Los hechos que sustentan el análisis que adelante se presenta tuvieron lugar en el marco de un proceso de *alfabetización matemática*² realizado directamente por quien esto escribe. En los nueve meses que duró el proceso se abordaron varios temas matemáticos, aquí me referiré exclusivamente a problemas de suma y resta así como a la escritura de los procedimientos de cálculo correspondientes ya que esta temática hizo aflorar con nitidez los conocimientos previos de los asistentes, y sus implicancias en el aprendizaje de las escrituras aritméticas.

La reflexión en torno a la relación *saber de la práctica-saber formal*, ha vislumbrado varias opciones para hacer transitar de uno a otro ámbito: la construcción de una escritura para los conocimientos que las personas ya poseen (Mariño s/f); la elaboración de puentes comunicantes entre uno y otro saber (Ávila y Waldegg 1997); el diálogo cultural que refiere a la creación de una escritura institucional que incluya elementos de ambas culturas (Mariño 1997); un movimiento de ida y vuelta entre la escuela y la comunidad (Knijnik 2004); el privilegio de las escrituras espontáneas de los aprendientes (Carvalho 1995 y 1997). En este trabajo decidí enfrentar a los participantes con los procedimientos convencionales y su escritura, sin promover en el registro gráfico institucional la incorporación de elementos de los procedimientos espontáneos como sugiere Mariño, ni privilegiar la representación gráfica de estos últimos, como propone Carvalho. No por intentar negar dichas formas de operar, sino bajo el supuesto de que son los propios de la matemática escrita convencional con los que las personas deberán interactuar en una sociedad letrada y porque “son esos los que las personas quieren aprender” (Mariño 1995). En efecto, por una parte coincido con la afirmación de que “los adultos [y los jóvenes]

² Con la expresión *alfabetización matemática* me refiero al acceso comprensivo y funcional a la matemática escrita. La noción, como yo la entiendo, alude a las escrituras numéricas y a las formas de operar con tales escrituras, nunca a la idea de que las personas no tienen conocimientos matemáticos cuando legan a un proceso de escolarización.

llegan a la situación de aprendizaje formal con una historia cognitiva y afectiva mucho más avanzada que la de los niños, y que las diferencias ‘culturales’ son por lo tanto mucho más acentuadas en el adulto que en los niños, así como sus ‘resistencias’ sociales y sus actitudes [hacia lo escolar] (Barth, 1996, p. 27). Pero sé por otra parte que el encuentro con lo escrito no se vive de la manera que lo viven los niños, estos últimos “aceptan hacer dibujos, bosquejos y escrituras alternativas como parte de su proceso de aprendizaje mientras los jóvenes y adultos no” (Carvalho, 1995, p. 226). Y es que éstos saben que si escriben las cuentas “a su propia manera”, están mostrando un déficit en relación con las formas que deberían saber utilizar. Así pues, el objetivo fue apoyar la apropiación de las escrituras numéricas y los procedimientos de cálculo convencionales con el enfoque descrito en el apartado 2, a la vez que identificar y analizar los fenómenos en él observados

2. Los participantes

El círculo (grupo) de alfabetización cuyos miembros son protagonistas del proceso al que se dedica este escrito se reunía martes y jueves de 5 a 7 de la tarde, gracias a la labor de un grupo de mujeres de clase acomodada que trabajaban conjuntamente con la parroquia de la colonia donde habitaban y quienes me autorizaron a desarrollar el trabajo de investigación que aquí refiero. Cuando llegué ahí por primera vez, para mi sorpresa, no ocurría lo mismo que en muchos otros círculos que había visitado en los días previos. En este caso, se percibía un grupo de estudio realmente constituido, los integrantes llegaron puntuales y su actitud mostraba la costumbre de un cierto ritmo y estilo de trabajo. La labor de alfabetización se había iniciado seis meses atrás, la realizaba una mujer muy gentil, de aproximadamente 50 años a quien me referiré con el nombre supuesto de Elisa.

El grupo cambió su constitución a lo largo del proceso dedicado a la *alfabetización en matemáticas*. Se inició con cinco miembros de los cuales, dos mujeres mayores abandonaron por razones que adelante se comentan, mientras que tres jóvenes entrarían a dar vitalidad al proceso cuando éste llevaba aproximadamente cuatro meses de iniciado. Los miembros con quienes se inició el trabajo fueron los siguientes:

Marta, una joven empleada doméstica de 25 años quien, según nos dijo, es originaria de un pueblo de Oaxaca pero ya casi olvidó el mixteco, su lengua materna, pues llegó a la ciudad

de México hace bastantes años. Es muy graciosa, a lo largo de las sesiones haría reír permanentemente a los compañeros, su presencia relajaba al grupo, particularmente en momentos que la dificultad de las tareas parecían rebasar las capacidades de los asistentes. Martha tiene una letra muy bonita, aunque escribe lento. En relación con la aritmética destaca el hecho de que Martha maneja muy bien el cálculo mental.

Ligio: un obrero de una fábrica de jabones, que tiene 28 años. Es agudo, maneja bien el cálculo mental y en la primera sesión identificó rápidamente precios y el punto decimal; escribe bien aunque con cierta lentitud. Con mucha frecuencia, Ligio “llevará la delantera”; durante el proceso – y de manera espontánea - ayudará permanentemente a los compañeros; a la larga se convertirá en una suerte de tutor de algunos de ellos.

Jesús: un joven de 17 años que se sonríe con facilidad, es mozo en una casa de la colonia donde se reúne el círculo y ha trabajado en una pollería. Viene de una zona rural del estado de Guanajuato de donde llegó hace algunos años; tiene también un cierto manejo del cálculo mental, aunque no igual que el de Ligio o el de Martha. En cambio, él capta rápidamente lo que aparece en los distintos textos que se utilizarán y, escribe bastante bien, aunque también lento.

Antonia: una mujer de 45 años, que llegó al Distrito Federal hace pocos años y trabaja también como empleada doméstica; el español no es su lengua materna pues creció y vivió en una zona indígena. Antonia llegó con retraso al grupo (se incorporó en junio) y esto se notaría a lo largo de las sesiones dedicadas a matemáticas, pues le cuesta trabajo escribir y "captar" las cosas propias del ámbito escolar. Por ejemplo, durante bastantes sesiones, no tomaría el lápiz ni daría vuelta a la hoja para continuar la lectura si no se le indica explícitamente. Estas acciones, casi automáticas para quienes están habituados a los procesos escolares, para ella han resultado difíciles. Antonia abandonaría el proceso cuatro meses después de iniciado

María Antonia, una mujer ya mayor que usa lentes y es bastante reservada, a su decir, tiene 68 años. María Antonia comenzó su proceso de alfabetización en marzo con el resto del grupo, pero abandonó y, después de tres meses, acaba de regresar al círculo. En el tiempo que permanecerá, mostrará relativas habilidades de cálculo mental e importante experiencia

en cuestiones de medición a la vez que grandes dificultades para leer. Esta cuestión, a la larga, le impedirá permanecer en el grupo.

Quienes se incorporaron ya adelantado el trabajo son: **Norma**, una joven de 17 años, trabajadora doméstica en una casa de la colonia, **Catalina**, de la misma edad, quien emigró de Oaxaca y también trabaja como empleada doméstica. Finalmente, **Margarita**, quien al igual que Catalina y Martha tiene como lengua materna el mixteco. Estas tres jóvenes, además de ser bromistas y juguetonas, mostraron gran interés en aprender y habilidades importantes para vincularse con la simbolización matemática; particularmente Norma quien, al igual que Ligio, asumió espontáneamente el papel de tutora de sus compañeras en muchas ocasiones.

Ninguno de los miembros del círculo había asistido a la escuela en su infancia. Fueron las condiciones socio-económicas y geográficas las que impidieron su escolarización a una edad temprana. Es decir que ninguno de ellos había visto interrumpida su escolarización por fracaso al interior del sistema educativo.

3. El espacio y la forma de trabajo

El lugar donde el círculo se reunía era un corredor bastante tranquilo de la sacristía de la parroquia cuya tranquilidad luego era interrumpida por dos motivos diferentes: las campanadas de llamada a misa y las pocas personas que por ahí transitaban. Quienes lo hacían, parecían estar acostumbrados a la actividad realizada en el círculo y pasaban tratando de no producir ruido, aunque la actividad de cualquier manera debía interrumpirse para posibilitar el paso, pues el lugar es muy estrecho.

El trabajo se realiza utilizando mesas con anuncios de *Coca Cola* y sillas plegables que, cada asistente saca de una pequeña bodega y guarda en ese mismo sitio al terminar la sesión. A falta de pizarrón, trabajamos con hojas de papel bond cuadriculado que se pegaban en la pared durante las sesiones. Transcurridos varios meses, el párroco informó que se podría utilizar un pequeño salón anexo a la sacristía. Esto dio confort a la realización del trabajo pues se contaba con mesa y sillas de madera y, aun sin pizarrón, el no tener que ponerse de pie cada vez que alguien pasaba fue una condición invaluable para el desarrollo del proceso.

Las actividades fueron conducidas por quien esto escribe. Empero, con el fin de apegarme a un formato convencional en el reporte, me referiré a la conductora del proceso en tercera persona.

4. El encuentro con la aritmética escolar

Los participantes en este estudio se sentían más cómodos e incluso entusiasmados cuando en la sesión de matemáticas hacían ejercicios de cálculo mental, dominio en el cual varios de ellos eran bastante competentes y algunos incluso expertos. La tensión también disminuía cuando los números correspondientes a una situación se presentaban en anuncios de tiendas o supermercados. La razón era que aquellos se situaban en el contexto en que comúnmente se utilizan y contenían tanto los principales referentes del saber propio de la práctica como indicadores del contexto que les permitían ponderar la corrección de los cálculos (cf. Avila, 1997). Empero, como se ha señalado, la tarea central en la educación matemática de jóvenes y adultos es precisamente introducir y enfrentar a la matemática escrita, la que todas las personas escolarizadas adquieren, por ende, lo fundamental del proceso sería precisamente hacer transitar a su manejo. En este tránsito se darían diversos fenómenos que a la vez que muestran las dificultades, ponen en evidencia que aquél es posible si ciertas condiciones se cumplen.

1. La pérdida de significación

Interpretar las escrituras numéricas, particularmente las correspondientes a los procedimientos de cálculo convencionales, es una tarea difícil para quienes no están familiarizados con ellas. Esta escritura constituye un sistema cuyas reglas no resulta fácil entender y utilizar. Testimonio de lo anterior es un episodio en el que participan Martha, quien mostraba destrezas importantes con el cálculo mental y Jesús, cuyo desempeño en este ámbito era menos destacado que el de aquélla. El episodio corresponde a los primeros (y difíciles) encuentros con la “suma escrita”:

Es la tercera sesión de trabajo, se están resolviendo algunos problemas sencillos a partir de la ilustración de un puesto de mercado en el que se venden diversos productos y cada uno de ellos tiene un cartel que indica el precio. Se supone que los asistentes ya conocen bastantes números entre 1 y 100 y comienzan a hacer sumas escritas utilizándolos, pues antes de iniciar la investigación que aquí refiero, la señora Elisa (la alfabetizadora) dedicó

tiempo a dichos temas, aunque utilizando una perspectiva basada en la manipulación de símbolos y la repetición. Un producto de tales enseñanzas son algunas *planas* de números y sumas de dígitos dispuestos en columna. En el proceso de investigación se han comenzado a abordar ambos temas desde otra perspectiva. La situación del mercado es parte de la secuencia preparada. Con tal secuencia se pretendía introducir a la escritura de sumas sencillas aprovechando los saberes transmitidos por la alfabetizadora.

El problema que pone de manifiesto la pérdida de significación es el siguiente:

¿Cuánto hay que pagar por dos cubetas y una blusa? (en la ilustración los artículos tienen anotado respectivamente \$8 y \$14).

Martha y Jesús han ido haciendo anotaciones y comentarios entre ellos. Jesús dice: “¡No sale!”, Martha hace un comentario similar. En sus cuadernos, han escrito lo siguiente:

	Martha	Jesús
	1	88
	<u>+4</u>	<u>+14</u>
	5	

El 5 que Martha obtuvo es resultado de descomponer el 14 y colocar el 1 y el 4 resultantes a la manera de dos sumandos y luego operar con ellos, como si ambos representaran grupos de unidades. La segunda suma – en la cual se ha compuesto un único número (88) a partir de dos ochos que representaban unidades - Martha la escribió con base en las sugerencias de Jesús. Sin embargo, ni él ni ella intentan resolverla. La expresión en sus caras indica que perciben que algo está mal. Ha surgido un conflicto entre sus expectativas de solución y las escrituras que han logrado producir.

Jesús dice a la conductora: ¡Mire, no va a salir!

Conductora: A ver, ¿pues qué es lo que compraron?

Martha: ¡Las cubetas y las blusa, pero no sale!

Conductora: A ver, ¿dónde está lo de una cubeta?

Jesús: Aquí (señala un 8)

Conductora: ¿Y lo de la otra cubeta?

Jesús: (señala el otro 8)

Conductora: A ver, dicen que son 8 de una cubeta y 8 de la otra, ¿entonces qué pasó?

Jesús y Martha se voltean a ver, se ríen pero no responden

Conductora: A ver, ¿qué pasó?, son 8 de una cubeta y 8 de la otra, pero como ustedes los pusieron juntos, ¿qué número se hizo?

Jesús y Martha se quedan pensativos, mientras, Toña observa

Jesús (después de pensar un poco): ¿88?

Conductora: Sí, 88, y 8 de una cubeta y 8 de otra, ¿son 88? (se ríen)

Martha: (en un tono jocoso habitual en ella): ¡Son 16! (risas)

Conductora: Sí, por eso no les salía, porque en vez de 16 pusieron 88, si quieren escribir 8 y 8 deben ponerlo así: (anota en columna los dos 8's; en seguida, sin que se le pida, Martha "completa" la suma escribiendo el 14 y configura la columna siguiente:)

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \\ 1 \\ \hline 4 \end{array}$$

Jesús: Mire, maestra, mire cómo escribió Martha ahora (Jesús ya colocó correctamente las cantidades en su cuaderno, anotando el 1 del 14 en el lugar que corresponde a las decenas)

Conductora: A ver, Martha, dónde están los 14 [pesos] de la cubeta, dónde los dejaste? (Jesús y Toña observan)

Martha: (se ríe, no responde, se ve confundida)

Conductora: A ver, que Jesús te explique cómo anotó el 14...

(Martha no espera que Jesús le explique, observa el cuaderno de éste y corrige su escritura pero ambos continúan sin hacer la suma)

Conductora: ¿Por qué ahora no quieren hacer las cuentas como el otro día que las hicimos "en la cabeza" y les salían muy bien? (silencio)

Conductora: ¿Por querer escribir se están confundiendo?

Martha: Sí (asiente también con la cabeza)

Conductora: Bueno, vamos a hacerlo "en la cabeza" y luego veremos cómo se debe escribir [...].

Como puede verse, la destreza de Martha con el cálculo mental - la cual le da un importante poder de estimación que muestra al señalar “¡[Compramos] Las cubetas y las blusa, pero no sale!” - se ha desvanecido ante el cálculo escrito.

Todos los asistentes al círculo de alfabetización mostraron tener habilidades importantes de cálculo mental, particularmente Martha. Sin embargo, las dificultades para transitar a la escritura fueron evidentes incluso frente a las sumas más sencillas.

Se ve que las enseñanzas de la señora Elisa (la alfabetizadora) – que preceden al episodio recién anotado y que incluyeron algunas cuestiones de aritmética - derivaron en un aprendizaje carente de significado. Pero también se constata que las destrezas de Martha con el cálculo mental no le resultan útiles para resolver por escrito el problema que le ha sido planteado. Tales destrezas pueden ayudarle a ponderar la corrección de los cálculos, esto es muy importante, pero es insuficiente para comprender las escrituras que trata de interpretar o producir; más aún para operar utilizándolas. Hay razones para ello.

El algoritmo de la suma que se anota en el papel, se realiza por columnas y de derecha a izquierda; adicionadas las unidades de orden inferior, se pasa luego a sumar las de orden inmediato superior; para hacerlo, se repite el proceso antes utilizado, sin importar el valor relativo de las cifras; se procede reiteradamente de este modo, hasta agotar las unidades de diferentes órdenes (es decir, todas las columnas). Este procedimiento es distinto del que las personas usan cuando calculan mentalmente para resolver problemas cotidianos. En este caso se tiene como referente principal el manejo del dinero y las estrategias son más flexibles, pero por lo general, como ya he anotado, se suma comenzando por las cantidades con mayor valor relativo, como serían los billetes de mayor denominación y luego los de menor valor, hasta llegar a las monedas (cf. Mariño; 1983; Avila; 1989 y 1990). Don José, un analfabeto muy avezado en el cálculo con dinero, en el transcurso de otro estudio utilizó las siguientes palabras para expresar tal forma de operar: “Primero cuenta uno los billetes, hasta después los quintos, si no, estaría uno al revés” (Avila; 1990; 64).

Comparándola con el cálculo sobre papel, esta lógica equivaldría a sumar primero las centenas, luego las decenas y hasta después las unidades, pero manteniendo en mente el valor relativo de las cifras (cienes, dieces, unos...). Tal forma de operar asegura la conservación del sentido durante la realización del cálculo.

Después de este escueto análisis, regreso a las escrituras de Martha. Ella sabe que 8 y 8 no son 88 sino 16, también sabe que 80 pesos corresponden a 8 monedas de 10; *su problema no es conceptual, es de vinculación entre los conceptos y la escritura*: parece no haber descubierto – entre otras cosas – que el valor que representan las cifras está vinculado a la posición que ocupan. Es razonable pues pensar que Martha, teniendo sólo como experiencia al respecto las sumas que la alfabetizadora le había enseñado mecánicamente, y no contando con suficientes referentes que le dieran significado a la disposición espacial y a la descomposición o composición de los números, se encontrara perpleja ante las disposiciones numéricas que ella misma había producido. El significado del cálculo que ella practica cotidianamente se ha desvanecido ante la escritura. Más adelante, la interacción con Jesús le permitirá disponer y resolver sumas como la siguiente:

32

32

32 ,

e incluso ayudar a Toña a hacer otra similar.

No obstante el aprendizaje sobre la suma escrita que Martha ha logrado, constataremos adelante la fragilidad de éste. En efecto, más avanzado el trabajo se propone el siguiente problema:

Una señora dijo:

Llevaba \$50, gasté \$6 en el frijol, \$8 en el pollo y \$2 en la tortillas. Por todo, gasté \$16. ¿Será cierto lo que dijo la señora?

Sin que se les indique, Martha y Jesús han comenzado a hacer la cuenta por escrito. De repente, Martha dice asombrada: “¡¿83?!” (es el resultado de su cálculo; todos se ríen por el tono que utiliza).

Jesús: No, es que escribiste mal

Martha escribió algo que no se alcanzó a registrar con detalle, pero que tenía la siguiente disposición:

? I

& ?

€ ?

Se ve aquí que Martha ha dispuesto los números de tal forma que constituyan una configuración simétrica. Pero esta disposición espacial que parece satisfacerle precisamente por su simetría le acarrea un problema de coherencia matemática.

Martha se queda viendo la cuenta, no atina a corregirla, está confusa, se enoja, finalmente dice: “¡No sale!”

La conductora le sugiere hacerla mentalmente pero ella insiste en la escritura. Jesús, viendo el nuevo apunte de Martha, le dice: “Si compraste de 8 para abajo (lo más caro en la lista de compras era \$8 y sólo eran tres productos) no puede ser 56” (que es el nuevo resultado que Martha anotó).

Finalmente, con la ayuda de Jesús, que se muestra más hábil y confiado frente a las escrituras, Martha re-escribe y obtiene la respuesta correcta.

Como se constata, hay una diferencia importante entre la destreza con el cálculo mental que se realiza cotidianamente y la que se muestra en el cálculo escrito. Aunque hay quienes como Jesús parecen tener más facilidad para interactuar con este nuevo sistema. Probablemente su menor edad le permita una interacción más flexible con las escrituras numéricas. Más adelante volveré a este último punto.

Se constata en lo anterior una cuestión fundamental: no es lo mismo comprender un problema que dominar su solución algorítmica. En el caso de Martha la dificultad se centra precisamente en este último aspecto. Ahora bien, nosotros sabíamos que se hacía indispensable el manejo del sistema decimal de numeración y la comprensión de las reglas que lo sustentan para alcanzar un trabajo comprensivo con los algoritmos. Algo de esto habíamos abordado en las sesiones previas a la antes comentada, pero era claro que el trabajo había sido insuficiente. Entonces, dedicamos un buen número de sesiones a este tema (cf. Avila 2004).³

³ Se trabajó la identificación y escritura de números, las regularidades en la serie, así como la noción de valor posicional con base en el registro de cantidades representadas mediante *billetes* y *monedas*, por ser éstos los referentes principales del cálculo para los participantes. Posteriormente, buscando transferir este conocimiento a otros modelos, se introdujo como situación *una dulcería*,

2. La batalla por recuperar el significado

- **De las formas cotidianas al cálculo por columnas**

Una vez trabajado el sistema decimal se regresó al trabajo de cálculo propiamente dicho. Se trataba de obtener los totales, así como “el cambio” (el sobrante) que se obtendría al pagar con billetes de cierto valor. En la primera situación planteada la consigna fue “*Resuelvan como quieran*”; por tal razón, probablemente el algoritmo por columnas no fue utilizado. Sin embargo, el uso de notas de establecimientos comerciales (figura 1) que se introdujo en otra fase de la actividad, resultó provechoso para familiarizar con la disposición convencional de la suma.

Después se descontextualizaron los cálculos con el fin de favorecer la resolución “por columnas” iniciando por la derecha. Las siguientes son interacciones derivadas de esta nueva vinculación con la adición:

Conductora: [...] cuando nosotros sumamos, por ejemplo 25 más 32 (al hablar va anotando los sumandos):

$$\begin{array}{r} \text{valen 10} \quad \text{valen 1} \\ 2 \quad 5 \\ + 3 \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

¿Se acuerdan que primero sumamos esta columna? (señala la columna de las unidades)

Jesús, Martha y Ligio: Sí

NOTA DE REMISIÓN			
FARMACIA LA SALUD			
DÍA _____ MES _____ AÑO _____			
NOMBRE DEL CLIENTE _____			
DOMICILIO _____			
CIUDAD _____			
CONDICIONES _____			
CANT	ARTÍCULO	PRECIO	IMPORTE
1	gotas	\$2	1 2
6	aspirinas	\$1 c/u	6
1	Jarabe para la tos	\$30	3 0
		TOTAL	

Figura 1

donde se hacían paquetes de dulces en base 10. El modelo no resultó tan útil como el dinero. Las razones se exponen más adelante.

Conductora: ¿Y entonces, cómo sumaríamos esto que tenemos anotado aquí?

(Varias voces al mismo tiempo): ¡7!

Conductora: Sí, aquí son 5 y 2, 7 (anota el 7) ¿Y aquí? (señala la otra columna)

Varias voces: 2 y 3, 5

Conductora: Y entonces tenemos...

Varias voces, pero sobresale la de Martha que dice: ¡57!

Conductora (anota el resultado y las leyendas marcadas en gris encima de las columnas respectivas a la vez que dice): Anoté aquí esto para que no se les olvide al sumar, que estamos contando aquí los que valen uno y acá los que valen 10. Acá es como cuando tenemos... (Ligio, con su expresión, parece adelantarse a la conductora) ¿Ligio ya se sabe esto muy bien?

Ligio: Sí, es fácil, allá (hace un ademán apuntando hacia la columna de la izquierda) son los de 10 y acá (apunta hacia la columna de la derecha) son los de a peso.

En este intercambio se observa un relativo dominio del cálculo por columnas. Sin embargo, sólo la reagrupación obligaría al uso pleno de los principios del sistema decimal de numeración y el valor relativo de las cifras, por ello se introdujo la actividad que se comenta a continuación.

- **De los argumentos espaciales a los posicionales**

Cada uno de los asistentes propone sumas de dos sumandos para que los compañeros los coloquen en columnas y después realicen el cálculo respectivo.

Ligio, a quien le gusta “jugar” con los números, propone la suma 104 más 35. Inicialmente, él mismo coloca incorrectamente en su cuaderno las cantidades que dictó:

104

35

Conductora (anota en la hoja que hace las veces de pizarrón la cuenta de Ligio, tal como él lo ha hecho y dice): Antes de que Toñita nos diga otra, quiero que le digan a Ligio si anotó bien los números o no.

(Nadie responde, sólo observan la suma)

Ligio: Está mal
 Conductora: ¿Está mal?
 Ligio: Sí
 Conductora: ¿Por qué?
 Ligio: [El 3] debe ir abajo del cero
 Martha: Como ése (señala otra suma anotada correctamente en la hoja-pizarrón)
 Conductora: ¿Cómo ése?, ¿y qué quiere decir como ése?
 Martha: Está mal, lo puso en medio
 Toñita: Lo puso atravesado
 Conductora: Ligio, puedes venir acá a poner el 35 donde debe ir?
 Ligio: (pasa y anota la cuenta nuevamente):

104

35

Conductora: ¿Les parece bien así?
 Ligio y Martha asienten con un movimiento de cabeza, Toña y María Antonia sólo observan (Jesús no asistió).

Como se ve en el registro, la necesidad de disponer - para sumar en columnas - números con distinta cantidad de cifras, obliga a una reflexión no necesaria cuando los sumandos tienen igual cantidad de ellas. Empero, se puede también ver, en el episodio sólo han emergido argumentos de tipo espacial: “Debe ir abajo del 5”, “Lo puso en medio”, “Está atravesado”. Siendo válidos en tanto que señalamiento de un error, estos argumentos no necesariamente expresan comprensión del valor posicional de las cifras ni del sistema decimal de numeración, de cuyas reglas derivaría la justificación intelectual (en el sentido de Balacheff, 1987) de la disposición correcta de los sumandos. Con el interés de hacer emerger argumentos de este tipo, se solicita resolver la suma y, una vez aceptada la validez del resultado, se plantea lo siguiente:

Conductora: Son 139, pero como Ligio la había puesto aquí, (señala la primera suma) saldría a 454, ya dijimos que está mal, pero ¿por qué sale mal?
 Después de un corto silencio, Martha dice:
 Martha: ¡Ah!, porque lo puso *de cambio*, tiene que poner de 100 aquí, de 10 allí y de peso aquí (señala en su cuaderno, que todos alcanzamos a ver, las columnas respectivas)

Conductora: ¿Estás de acuerdo Ligio?

Ligio asiente con un movimiento de cabeza, se sonríe.

Conductora: ¿Sí, Ligio? Te fijaste que estos (el 5 de 35) lo pusiste como si fueran de a 10... debemos de ponerlo así como dice Martha (escribe en la hoja del rota-folios) los de peso aquí, con los de 10 aquí y con los de 100 aquí.

Ligio: Ahí en el cero van puros de a diez (lo dice en voz alta, como para afirmarse la idea él mismo)

En el episodio se observa una evolución en las “pruebas” ofrecidas para justificar la corrección de las escrituras. Cuando Martha dice: “Lo puso de cambio”, en mi interpretación quiere decir que el 4, al estar en lo que sería una columna a la derecha del 5 (que representa unidades) estaría colocado en el lugar de los centavos. Siguiendo con su explicación, ella comunica a sus compañeros el lugar en el que cree deben colocarse las cantidades; los lugares, ahora están relacionados con el valor de posición: 100, 10 y uno, respectivamente.

Lo anterior no eliminó la extrañeza de algunos por la disposición en que debían colocar los números en el resto de la actividad, ya que los sumandos que conformaban las sumas eran de desigual número de cifras, y parece que son las configuraciones simétricas las que han aceptado.

- **La colaboración de los más capaces y un cierto dominio de “las columnas”**

Ligio y Martha comentan de nuevo entre ellos. Ahora Ligio participa como *interlocutor más capaz*:

Martha: No me sale

Ligio (a Martha): Aquí son los pesos (continúan trabajando)

Ligio, dirigiéndose de nuevo a Martha: “Son dos de 10 y... [inaudible en la grabación]

La reflexión de estos dos jóvenes sobre el valor de las cifras y sus consecuencias en el procedimiento para sumar continúa. Más adelante Martha, sobre la base de una idea que parece ir aclarando, responde así a la participación de la conductora:

Conductora: Si pongo el 25 y el 114 así (anota el 25 en el lugar de las decenas y centenas), está mal?

Martha (interrumpe): ¡Porque andan los de a peso con los de diez!

Lo que todos estos episodios me parecen mostrar, es la construcción de una idea acerca del valor posicional de las cifras. Se ha establecido una regla: no mezclar en una misma columna cifras con distinto valor relativo. Esto, aparentemente simple, expresa el producto de un trabajo intelectual en torno a los números y las reglas de su escritura, así como la conquista de una comprensión lograda en la interacción con las situaciones y con los compañeros, al menos en algunos miembros del grupo. Esta comprensión se manifestará de diferentes maneras: por ejemplo en la elaboración de cálculos correctos por parte de Jesús y en las explicaciones dadas por Ligio a Toña y María Antonia que habitualmente van rezagadas:

Ligio: “Aquí son 9, son 2 y 7 de a peso; aquí son 2 y 2 de 10, aquí es uno de 100, se cuentan éstos [...]”

Martha, que no se había atrevido a explicar a sus compañeras aun a petición de la conductora, animada por la participación de Ligio, hace en voz alta, para ellas, otra suma.

Durante el proceso va señalando el valor relativo de las cifras, refiriendo siempre al dinero.

La colaboración de Ligio a lo largo del proceso ha sido invaluable, prácticamente en todos los registros se anotan frases como: “Ligio se sienta junto a Toña, trata de explicarle”, “Ligio revisa los problemas a Martha”. Su participación en tal sentido, ha sido sobre todo espontánea, pero también por solicitud de la conductora ha ayudado a sus compañeros. En cambio a Martha le da pena participar ayudando directamente a los otros; no obstante ocasionalmente lo hace. Pero la colaboración principal de Martha se ha dado en otro sentido: ella ha contribuido con sus preguntas, sus dudas, sus participaciones y respuestas a la conductora. En efecto – según se constata en los registros - a lo largo del proceso con frecuencia la conductora ha tenido que ajustar o ampliar sus participaciones como respuesta a las intervenciones de Martha.

- **Toña y María Antonia: rigidez en los esquemas previos y abandono del proceso**

He señalado ya que Toña y María Antonia, las dos mujeres mayores, han mantenido un ritmo desigual en relación con sus compañeros más jóvenes. Adicionalmente, en todos los registros hay anotaciones del tipo: “La señora Elisa ha dedicado la sesión a ayudar a María Antonia a resolver la tarea propuesta”... “Por momentos, la señora Elisa toma al lugar de Toña y prácticamente es ella quien resuelve el ejercicio”... “Espontáneamente, Ligio se

sienta con Toña y le explica cómo resolver la actividad”... “María Antonia continúa ‘atorada’”.

Nuestra hipótesis es que el largo tiempo en que estas mujeres han utilizado su sistema de cálculo ágrafo, lo convirtió en un sistema rígido casi incapaz de ajustarse a la exigencias del nuevo sistema: el basado la escritura. El siguiente es sólo un episodio – de entre muchos - donde lo anterior se constata:

Se trata de una de las sesiones iniciales del tratamiento de la suma. Se plantea, con el apoyo de una ilustración, una serie de problemas sencillos en una situación bastante familiar a los asistentes: “Los boletos del autobús”. Una de las preguntas derivadas de la situación es la siguiente: ¿Cuánto se paga por tres boletos de adulto? (en el cristal del autobús que aparece en la ilustración hay un letrero que dice Adultos \$32, Niños \$16). En virtud de lo ocurrido en la primera parte de la sesión, la conductora sugiere resolver otros problemas “como quieran”, es decir, prescindiendo incluso de la escritura si así resulta pertinente. Sin embargo, Jesús y Martha – siempre en interacción - anotan los tres sumandos correspondientes “en columnas” para resolver la cuenta:

32

32

32

y la resuelven bien. Parecen entusiasmados con el dominio que han logrado sobre el cálculo por columnas. Por su parte Toña intenta resolver mediante cálculo mental pero parece “atorada”. Cuando Martha y Jesús se percatan de ello le dicen: “Apunte los números, luego cuente los de un lado y luego los del otro y ya”. Pero Toña parece no comprender la sugerencia de sus compañeros pues se queda sin hacer nada. Entonces la conductora la guía para que anote los números de la manera que le ha sido sugerida (en columnas) y le pide hacer la cuenta, sin más especificaciones. En seguida, apoyándose en su escritura, se escucha a Toña decir en voz baja: “30 y 30... 60, y 30... 90... [y seis]... 96”.

Se observa en esto un hecho interesante: la anotación sólo resultó útil para conservar en la memoria las cantidades involucradas. Con base en este recurso mnemotécnico Toña utiliza

- ahora eficientemente - el procedimiento espontáneo por excelencia: adicionar primero los valores correspondientes a las cifras de orden superior (en este caso los “treintas”). En el resto de los cálculos que involucran suma resueltos en esta y otras sesiones, Toña repite la misma estrategia. María Antonia actuará de la misma manera. Ambas necesitarían muchos rodeos y ayudas para hacer las anotaciones pertinentes.

Nosotros vemos en lo anterior unos esquemas de acción cuyo uso prolongado los ha vuelto inflexibles e incapaces de adaptarse a la lógica del cálculo escrito que exige una organización diferente de las acciones que conducen a la obtención del resultado. La reelaboración necesaria para acceder al registro simbólico no ocurre.

Producto de lo anterior, la comprensión que Toña y María Antonia muestran en la realización de las tareas y en sus interacciones es mucho menor que la lograda por sus jóvenes compañeros. Con esta comprensión desigual del valor posicional y los procedimientos escritos, Toña y María Antonia dejarán el círculo para ubicarse en otro en el que, a decir de las encargadas del centro, puedan avanzar más en el proceso de alfabetización propiamente dicho.⁴ En las siguientes sesiones, la ausencia de estas dos mujeres sería compensada con la presencia de Catalina, Margarita y Norma, las jóvenes de quienes se habló al inicio del escrito y que vendrían a dar una nueva dinámica al desarrollo de la experiencia.

- **Resta con desagrupación y aceptación del cálculo por columnas**

Los adultos analfabetos han elaborado en su experiencia de vida dos formas básicas de resolver los problemas de resta: una de ellas, analógica a la suma, consiste en restar primero los billetes, paquetes u objetos de mayor valor relativo, la cual es utilizada en los casos en que no está implicada la desagrupación. La segunda forma de operar se pone a funcionar cuando se necesita desagrupar y consiste en calcular, sumando a partir del primer número, el número necesario para completar el mayor (cf. Mariño 1983 y Avila 1990). Con frecuencia, esta forma de proceder se apoya en el conteo o da lugar a varias aproximaciones.

⁴ La idea es incorporarlas en el grupo coordinado por una mujer con una eficiencia probada en alfabetización. Por supuesto, eficiencia en los términos definidos por el propio grupo de alfabetizadoras.

En una sesión posterior a las antes citadas se trabajaría la resta con desagrupación. Los siguientes renglones dan una idea del acercamiento propuesto.

El trabajo se hace a partir de problemas de compra-venta. En un cierto momento se solicita modelar las acciones de resta mediante el conteo de *billetes* de papel y *monedas* de \$1 que han estado disponibles al centro de la mesa todo el tiempo. La respuesta esperada es que se represente el minuendo, y luego se retire, de la cantidad representada, la indicada por el sustraendo. Esto obligaría a cambiar, físicamente, billetes de \$10 por monedas de \$1.

La interacción entre los asistentes es intensa. Norma toma un papel importante como tutora de Catalina y Margarita.

Las muchachas acompañan su cálculo con movimiento de dedos. Todos se ven concentrados en la tarea, aunque por momentos hay participaciones que expresan dificultades o necesidad de ayuda:

Norma (refiriéndose a la resta que aparece en seguida): ¿Aquí como le hago? ¡Tiene 5 arriba y 9 abajo!

Conductora: ¿Ya no te acuerdas qué hacemos si hay 5 arriba y 9 abajo?

Norma: ¿Le robo uno al 9?

Conductora: ¿Por qué al 9?

Norma: (se queda pensativa, se sonríe, luego comienza a escribir) [...]

Margarita, por su parte, está confundida, ha restado lo siguiente pero parece no convencerse de su propio hacer, porque se queda viendo la resta:

$$\begin{array}{r} 75 \\ - 49 \\ \hline 3 \end{array}$$

Conductora: ¿No le entiendes, Margarita?

Margarita: ¿Pues cómo le empiezo, de arriba o de abajo? (se refiere a cómo restar las unidades)

Conductora: Fíjate bien, si tú ves los números completos que tenemos aquí, tienes 75, y quieres quitarle 49. Al 7, que vale 70, le quitaste ya el 4, que vale 40, y te quedan 30, que es lo que vale este 3, pero ahora al 5 le tienes que quitar 9... ¿y qué pasa ahí?

(Margarita se ríe, también Norma que ha seguido de cerca el diálogo)

Conductora: No te alcanza, ¿verdad?...

Margarita y Norma se sonríen y se miran con cierta complicidad

Conductora: ¿Quién quiere decirle a Margarita cómo hacerla?

Martha: Tiene que pedir prestado en el 7, van a quedar dos (se refiere al que será el resultado en las decenas) el que pide lo pone allá, [con los que valen uno] son quince.

Conductora: ¿Le entendiste, Margarita?

Margarita: (se ve dudosa, no responde)

Conductora: A ver, Marta, ¿qué le dijiste a Margarita?

Martha: [Que] tiene que prestar uno éste de acá [el 7], para que se hagan más, quince, y el siete se convierte en dos, porque le prestó al otro, va a salir dos.

Margarita: (su expresión continúa siendo de duda)

Conductora: A ver, Margarita, ¿te acuerdas qué hacíamos con los billetes cuando no nos alcanzaba el cambio para dar lo que necesitábamos?

Margarita: (asiente con un movimiento de cabeza)

Conductora: Bueno, pues aquí es como si un billete de a 10 lo cambiaras por monedas, por eso se hacen 15 con estos otros cinco, ¿sí te acuerdas o no?

Margarita: Sí

Conductora: Entonces, si acá le prestaste uno para ponerlo acá, cuántos te van a quedar?

Margarita: Seis

(Cata también ha seguido atentamente la explicación)

Conductora: ¿Ya le entienden un poco más?

Norma y Cata asienten, pero aún se ven dudosas.

Conductora: Ligio, vuélvenos tú a decir, ¿qué pasa cuando no podemos quitar 9 al 5? [...]

Jesús: ¡Yo mejor con éstos! (y toma los *billetes* y *monedas* que han estado disponibles en el centro de la mesa desde que inició la sesión)

Jesús empieza a contar los billetes y *monedas*; Ligio y Norma también.

Margarita (después de haber tomado los *billetes* y *monedas* correspondientes y haber cambiado un *billete* por 10, dice): ¿De estos se agarra el 9?

Conductora: ¿Pues tú qué crees?

Margarita: Que sí (se ríe, luego continúa trabajando)

Los procedimientos contruidos en la experiencia de vida son en buena medida responsables de la dificultad de Margarita para restar: ella ha comenzado a hacerlo de

izquierda a derecha, usando el procedimiento espontáneo según el cual se cuenta primero lo que tiene más valor relativo; este procedimiento sólo es útil cuando la desagrupación no es necesaria. El procedimiento se hubiese aplicado sin conflicto frente al cálculo escrito si tal hubiese sido el caso, pero para restar 9 de 5 es necesario desagrupar, entonces el procedimiento encuentra su límite. Es la interacción entre el conocimiento previo (que conduce a iniciar por la izquierda pero que vale sólo para el caso más simple) y la nueva forma de restar que se le presenta (y que implica iniciar por la derecha) la que genera la confusión de Margarita. Si ella hubiese mantenido “pura” su forma previa de operar, habría calculado el complemento razonando más o menos así: “49 y 1 son 50; 50 y 25 son 75; 25 y 1 son 26, entonces 49 y 26 son 75” y luego habría anotado el resultado (26), tal como hacían Antonia y María Antonia. Pero ella actúa de otro modo: ha aceptado la presión del cálculo por columnas, cuyas reglas intenta comprender. Esto, por un momento la paraliza; finalmente resuelve bien.

Hoy la participación de la conductora en el episodio me parece excesivamente verbalista. Empero, la dinámica establecida en el grupo permite que otras voces se escuchen produciéndose así aportaciones más pertinentes. Aún más allá, la participación de Jesús le daría un giro a la actividad, su “¡Yo mejor con éstos!” - que refiere a los *billetes* y *monedas* - descentra las interacciones y llama a otros a hacer lo mismo que él ha decidido. Este desplazamiento hacia la actividad manipulativa (no con una simple función ilustrativa sino como sustento de las operaciones cognitivas personales) permitiría rebasar el estancamiento. No obstante las bondades de esta forma de actividad se necesitarían algunos intercambios para sacar cabal provecho de las acciones manipulativas, esto se observará en el siguiente episodio.

- **Pérdida del control cognitivo sobre las acciones manipulativas**

Ligio decide - probablemente más por sumarse a la forma de trabajo del resto de sus compañeros que por una necesidad intelectual - comprobar los cálculos que ya ha realizado, reproduciendo con los *billetes* y *monedas* las acciones mentales apoyadas en el lápiz y el papel. Empero, mediante su acción manipulativa no recibe la confirmación del resultado de la resta que en el momento resolvía; el hecho lo confunde, repite el procedimiento pero no aclara el error; finalmente, guiado por la conductora logra detectarlo: no había retirado el

billete que cambió por 10 *monedas*. Pero no es él el único que enfrenta el problema, pasados unos minutos, Jesús llama a la conductora:

Jesús: ¡Mire, ya la hice otra vez y me sale igual! [se refiere a que el resultado con los billetes es 10 unidades mayor al previsto]

Conductora: A ver, déjame ver... (observa los *billetes* y *monedas*, Jesús tampoco ha retirado el billete que cambió por 10 monedas)... ¿qué hiciste con el billete que cambiaste por las diez monedas?

Jesús: ¡Ah, sí! (se concentra en revisar su cálculo).

Empero, parece no obtener la respuesta satisfactoria porque más adelante se escucha el siguiente diálogo:

Norma: Se tiene que convertir en 18, le vas a quitar 9, ¿no? Quedan...

Jesús: ¡Nueve!

Norma: Bueno, entonces acá les vas a quitar ya un número porque eran 9, ¿no?, pero acuérdate que ya le quitaste uno, ya nomás quedan 8, entonces de ahí, ocho, le quitas 7...

Jesús: (anota el 1). A ver si ya está bien (mostrándole el cuaderno a Norma)

Norma. Sí

Jesús: Es que no me acordaba de quitar las que había cambiado, por eso [la conductora] me las regresó

Conductora (que ha seguido el diálogo): ¿ya le entendiste?

Jesús: Ya me la dijo [Norma], es que yo no pagaba [la que cambiaba]

Norma: ¡Vas a necesitar toda tu vida para pagar las que debes! (se ríen)

Como se ve, Norma ha comprendido el mecanismo de “pedir prestado”, incluso ahora es capaz de ayudar a sus compañeros y de hacerles bromas al respecto. Además, a excepción de Margarita que sigue algo atorada, a estas alturas del proceso todos han resuelto correctamente los cálculos. Podría suponerse que “pagar las que se piden prestadas” es algo que varios de los asistentes no olvidarán al realizar futuros cálculos.

Conviene destacar, por otro lado, la capacidad de colaboración de todos los miembros del grupo. Un elemento importante – considerando la categorización de Meloth y Deering (1994) – es que el contenido matemático ocupa el foco de atención en las interacciones que se suceden. Efectivamente, las interacciones registradas durante la actividad matemática no privilegian cuestiones de organización ni préstamo de materiales tal como sí sucede en el

trabajo con niños (Avila y Becerra 2004), sino que se centran en las dudas, la formas de solución y los resultados. Es decir que la interacción es cognoscitiva en tanto que refiere a los procesos y los esfuerzos compartidos por apropiarse del contenido matemático.

En el caso específico de la resta con des-agrupación, al final de la interacción se constata un nivel de comprensión mayor sobre el tema. Los participantes han logrado resolver correctamente los cálculos y los problemas planteados. La dificultad principal enfrentada al resolver las restas (la reagrupación) por ahora parece haberse sorteado exitosamente, pues a excepción de Margarita, al final de los episodios arriba anotados todos han resuelto correctamente los cálculos propuestos. Empero, el significado de resta hasta aquí utilizado es parcial, pues sólo se han trabajado problemas donde esta operación era útil para calcular una disminución. La ampliación de este significado llevaría a otros sucesos, otros avances y otras dificultades.

- **Ampliación del significado resta y conflicto para identificar el procedimiento de cálculo**

Hasta aquí parece haberse ganado en comprensión sobre los problemas de resta presentados por escrito y el procedimiento de resta con des-agrupación. Los *billetes* y *monedas*, a veces sugeridos y a veces evocados espontáneamente han resultado un recurso de primer orden en los aprendizajes procedimentales alcanzados.⁵ Sin embargo, se habían resuelto sólo problemas donde el significado que las situaciones le confieren a la resta es “quitar”. De tal suerte, el cálculo necesario para resolverlos guardaba una concordancia (directa) con las situaciones abordadas, es decir que la escritura aritmética que representa los problemas trabajados es idéntica a la que lleva a las soluciones (cf. A. Descaves 1999; cit. por Peltier, 2003, p. 42). Un ejemplo de esto es el siguiente: en el problema “Lupe va a comprar el mandado, si lleva \$75 y gasta \$49, ¿cuánto dinero le queda?”, la ecuación que representa el problema es: $75 - 49 = ?$ y corresponde también a la operación que conduce a la solución.

⁵ No ocurrió lo mismo con modelos también decimales pero distintos del sistema monetario de uso corriente, como por ejemplo el basado en paquetes (de dulces) o regletas tipo Dienes. Baste decir que en una de las sesiones donde Norma trataba de explicar a Catalina cómo restar con des-agrupación, con el apoyo de las regletas, en algún momento le dice: “Házle como cuando le hacemos con el dinero, cambias el de a \$100 por diez de a \$10. Una vez dada esta recomendación, Catalina logra resolver la resta.

Restaba ahora enfrentar a situaciones en las que el sentido de la resta es “completar” o “encontrar una diferencia”. En este caso, no hay concordancia (directa) entre la representación del problema y la escritura de la operación que conduce a la solución. La siguiente situación ilustra lo anterior: “Tengo \$76, necesito \$100 para el abono del televisor, ¿cuánto dinero me hace falta? La representación del problema es: $76 + \underline{\quad} = 100$; la escritura convencional que orienta a la solución es: $100 - 76 = \underline{\quad}$. Esto, como se ve, hace necesaria una operación cognitiva adicional: transformar en una expresión de resta la expresión de suma que se asocia directamente al problema planteado, lo cual implica un conocimiento de la relación entre ambas operaciones. Es fácil suponer que este hecho dificultará la ampliación del dominio semántico de la resta y la identificación del procedimiento experto como instrumento de resolución útil en tal dominio.

Efectivamente, las interacciones generadas en el círculo cuando esta tarea se enfrentó, muestran la dificultad implicada en la resolución de problemas con una noción de resta distinta a la de “quitar”, específicamente la de encontrar un faltante:

Jesús: ¡Aquí no le entiendo, a la 4! (se refiere al problema 4: Estamos a 20 de febrero, ¿cuántos días faltan para que termine el mes?)

Norma: ¿Cómo está la cuatro?

Ligio: (lee el problema en voz alta)

Jesús: ¿Cuántos días tiene el mes?

Conductora: Acuérdense que estamos en febrero, ¿cuántos días tiene febrero?

Varios: 28

Conductora: Entonces, si tiene 28 días y ya estamos a día 20, ¿cuántos días faltan...?

Ligio: Ya acabé

Jesús: ¡Ay dios mío, no le entiendo!

Norma se acerca a Jesús a tratar de explicarle algo sobre el problema, el diálogo es ininteligible en la grabación. Ligio, por su parte, entabla un diálogo con Margarita, intentando ayudarle a resolver el problema pues la percibe “atorada” mientras Norma y Jesús continúan el diálogo sin que éste acabe de convencerse de los argumentos de Norma, lo cual se nota por su actitud [...]. Entonces la conductora decide actuar.

Conductora: A ver, fíjense bien, voy a hacer una hoja de calendario del mes de febrero (dibuja sobre la hoja de rotafolio la hoja del calendario, remarcando el 20):

Febrero

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

Ahora díganme, ¿cuánto falta para que se acabe el mes, o sea, cuánto falta para que sea día 28?

En ese momento, parece que todos comprenden lo que pueden hacer para resolver el problema: Martha y Cata cuentan con los dedos a partir del 20, Jesús le dice a Norma: “Ya, ya sé cómo”; Norma dice a la conductora: “¡Estaba tan facilito!” (y proceden a anotar la respuesta). Mientras, Ligio apoya a Margarita: “Estamos a 20, ¿cuánto falta para el 28?” le dice. Margarita es la más atrasada en el intento de resolución, pero cuando Ligio le plantea la pregunta anterior, ella cuenta con los dedos a partir del 20, luego le dice: “¿Ocho?”, y tras obtener su aprobación, anota el 8.

Como se habrá percibido, no resultó fácil obtener la solución a un problema en el que la resta es útil para calcular un faltante. Las reacciones de los participantes permiten constatar que cuando se utiliza el cálculo ágrafo el faltante se calcula mediante el procedimiento aditivo ya antes descrito. Pero la dificultad en este tipo de problemas – acrecentada en relación con los que implican disminución – puede explicarse tanto por la menor frecuencia de aparición en la acción cotidiana como por la concordancia indirecta entre la expresión del problema y la operación que permite resolverla explicada por Descaves.

Son las participaciones de los compañeros, y de la conductora las que permiten finalmente que la respuesta correcta emerja. El uso del calendario jugó un papel importante en el logro del objetivo. Pero el procedimiento utilizado fue el conteo ascendente a partir de 20. Es decir que, la estrategia de solución movilizada no se acercaba lo más mínimo a la convencional consistente en realizar la resta $28 - 20$. La cuestión es que la estructura relacional del problema lo presenta asociado a la noción de sumar: “ $20 + 8 = 28$ ”. Era necesario que la operación resta (incluyendo la técnica operatoria) fuera aceptada y comprendida en su sentido más amplio. Más adelante se cumpliría parcialmente el objetivo.

- **Conflicto entre el algoritmo y la intuición**

Días después del episodio recién referido, se entregó a los asistentes una hoja con cinco problemas de resta, cuatro de ellos con la idea de complemento o comparación. En cada uno de los problemas aparecían una suma y una resta sin resolver. La consigna era la siguiente: “Escoja la operación que sirve para encontrar la solución del problema y resuélvala”. Al avanzar la actividad, se hace evidente el conflicto entre la solución intuitiva para los problemas de calcular el faltante (suma), y el procedimiento formal de solución (la resta). Por ejemplo Martha y Ligio, que terminan primero la tarea propuesta, no se ponen de acuerdo en los resultados. Otros están atorados. La conductora decide entonces revisar los problemas con la participación de todos; en el que implicaba la noción de sobrante, la respuesta es unánime: “[Es de resta] porque es de cuánto sobra”. Algo distinto ocurre cuando se busca llegar a un acuerdo sobre el acercamiento útil para resolver del siguiente:

Quiero comprar unos zapatos de \$70, tengo \$55, cuánto me falta para completar los \$70?

Conductora: ¿Este problema con qué se resuelve [con suma o con resta]?

Norma: Con suma

Conductora: A ver, ¿los demás qué dicen?

Margarita y Cata marcaron la resta para indicar que seleccionan esa operación, pero no responden (probablemente tienen duda), Martha y Ligio marcaron la suma (al inicio Ligio tenía una resta, pero el diálogo con Martha lo llevó a cambiar su solución pues dice: “Tengo suma, tenía resta”).

Conductora: Vamos a ver si nos podemos poner de acuerdo, vamos a hacer las dos operaciones, a ver cuál resultado vemos que nos conviene.

Todos se ponen a resolver las dos operaciones:

$$\begin{array}{r} 70 \\ - 55 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 70 \\ + 55 \\ \hline \end{array}$$

Ligio: Ya me salió a mi: 15

Jesús (a Norma): Pásame billetes

Terminan los cálculos y, según se solicita en el ejercicio, seleccionan la operación que resuelve el problema. Varios han seleccionado la suma.

Conductora: Vamos a pensar un poquito... Martha, ¿cuánto valen los zapatos?

Martha: Setenta

Conductora: Los zapatos valen 70, necesito setenta porque eso valen los zapatos, y ya tengo 55, entonces ¿cuánto me hará falta para completarlos?

(Todos se quedan pensativos)

Ligio: 15 pesos

(Los demás, por la expresión en sus caras, parecen decir que ya entendieron)

Conductora: Casi todos ustedes escogieron la suma para sacar la cuenta, pero con la suma nos resulta 125

Ligio: Ahí nos alcanza para los zapatos de 70

Conductora: Sí, porque tenemos 125, pero los zapatos cuestan nada más 70, y ya tenemos 55, nos faltarán los 125?

Ligio: Sí, porque con 15 pesos no me compro nada (risas)

Conductora: A ver, otra vez les pregunto: si ya tengo 55 y sólo cuestan 70 los zapatos, sí me hacen falta 125?

Ligio: O setenta

(Los demás sólo observan, aunque lo hacen con interés parece que no están dispuestos a participar)

Conductora: Los demás, ¿qué opinan?

(Silencio)

Conductora: Bueno, vamos a seguir pensando en esto la próxima clase.

Parecía que la participación inicial de Ligio colaboraría en la comprensión que los demás alcanzarían sobre el problema y el cálculo útil para resolverlo. A la pregunta de “¿cuánto me hará falta?”, él responde: “15 pesos”, empero, los siguientes renglones del registro muestran poca claridad al respecto pues ante el interrogatorio Ligio retrocede. La dificultad, como hace tiempo sabemos, tiene sus razones (cf. Vergnaud, 1991); los jóvenes de nuestro estudio enfrentan una aparente paradoja: se demanda completar una cantidad y esto

conforme a los procedimientos espontáneos se sustenta en un razonamiento aditivo, sin embargo, es la operación resta la que permite obtener la solución. Lo que resuelve la aparente paradoja es la comprensión de la relación entre la suma y la resta (que conduce a la inversión de la expresión inicial (la suma *con hueco*) para llegar a la solución mediante un procedimiento canónico. Pero, como se ha señalado, el entendimiento de la relación entre problema y procedimiento de resolución se dificulta en los casos en que no es directa la concordancia entre el cálculo necesario para resolverlos y las situaciones abordadas. Trabajamos entonces utilizando la comparación de los resultados obtenidos mediante los procedimientos intuitivos y los procedimientos canónicos para sumar y restar. Aunque fue necesario trabajar en torno a varios problemas para que la aparente incoherencia se aceptara, el acercamiento finalmente dio fruto: al menos por un período de tiempo los jóvenes identificaron los problemas de búsqueda de faltantes o diferencias como problemas que pueden resolverse con la resta.⁶

5. Estabilidad sólo relativa de los nuevos procedimientos

La comprensión de la noción resta en un sentido amplio, esto es, incluyendo la identificación del procedimiento canónico como herramienta para resolver problemas de faltantes o diferencias, se pondría a prueba un tiempo después, casi al final del proceso, cuando se trabajó alrededor de un anuncio de supermercado y uno de los problemas a resolver fue el siguiente:

“Quiero comprar un aceite Dorela, pero sólo tengo \$6.20, ¿cuánto me falta para completarlo?” (en la ilustración, el precio del aceite es de \$9.40).

Cata y Norma comentan entre ellas, hacen cálculo mental apoyado con conteo de dedos.

Margarita y Martha cuentan con los dedos, realizando un conteo ascendente de \$6.20 a 9.40. Muy rápidamente Margarita dice: “3.20”, en voz baja, como para sí, casi inmediatamente Martha termina su conteo y dice también: “3.20”, luego lo hace Norma.

Conductora: ¿Y con qué sacamos esta cuenta que acaban de hacer si queremos escribirla, con una suma o con una resta?

Cata: Con resta

Ante la respuesta de Cata, Martha hace una expresión que indica desacuerdo

⁶ R.C. Flores (2003) ha mostrado la utilidad de este procedimiento con niños que cursan la escuela regular.

Conductora: A ver, Martha, ¿te acuerdas qué quiere decir sumar?

Martha: (asiente con un movimiento de cabeza) que vamos a juntar lo que tenemos

Conductora: Fíjate, si yo sumo, o sea que si yo junto 6.20 y 9.40, ¿me van a salir 3.20?

Martha: (mueve la cabeza denegando y se ríe)

Conductora: No, ¿verdad?, te saldría muy grande el resultado. Y si a 9.40 le restamos 6.20, o sea que le quitamos 6.20, ¿sí nos podrá salir 3.20?

Martha, y el resto de las compañeras asienten con un movimiento de cabeza.

Conductora: Entonces, ¿con qué fue esta cuenta, con suma o con resta?

Norma (se adelanta): Con resta

Conductora: Hagan pues la resta en su cuaderno [...]

El resto de los problemas derivados del anuncio (con suma, o con resta asociada a la idea de quitar) no causaron dificultades. Las dificultades aparecen ante los problemas que refieren a un faltante o una comparación. En este caso, la vuelta a las estrategias no convencionales es casi inmediata: los problemas se resuelven a partir de la idea de complemento, sin *romper* los números, con el apoyo del conteo ascendente y dejando de lado el cálculo escrito convencional; el conflicto entre el cálculo intuitivo y los procedimientos escritos vuelve a aparecer. Es una cuestión que implica dos elementos íntimamente vinculados: comprensión de la estructura del problema y, sobre la base de dicha comprensión, la selección del procedimiento con el cual puede resolverse.

Probablemente, con el acercamiento reiterado a dichos temas, en lo que resta de la educación primaria de estos jóvenes, se alcanzará mayor estabilidad al respecto.

Discusión

Quienes asisten a los círculos de alfabetización y educación para jóvenes y adultos practican en la vida un cálculo en el que se manipulan cantidades (dinero, kilos, paquetes...) y no necesitan escribir para realizarlo. En la escolarización básica de este sector de población, un objetivo importante es el manejo de las formas convencionales del cálculo escrito, basadas precisamente en la manipulación de símbolos, tanto porque este sistema permitirá el acceso a ciertas actividades laborales y escolares futuras, como porque es el que las personas quieren aprender. Sería deseable que el significado con el que se operan las cantidades cotidianamente no se perdiera al transitar a la manipulación simbólica. Sin embargo, como aquí he mostrado, no es fácil que al escribir los cálculos se conserven en la mente el significado de los datos a los que refieren los problemas, que "se vean" los billetes o las monedas, como sí "se ven" cuando se calcula mentalmente. Las disposiciones espaciales de la escritura numérica y los mecanismos que permiten operar con ella ("romper" los números y calcular iniciando por las unidades de menor orden) contribuyen a desdibujar dicho significado.

El desafío que implica dotar de significado a la matemática escrita se multiplica cuando quienes la intentan aprender tienen un sistema de cálculo estructurado y estable y con base en él se acercan a las nuevas escrituras y procedimientos. En efecto, en el caso que aquí se ha presentado, los procedimientos espontáneos estuvieron permanentemente en el pensamiento de los participantes y, en no pocas ocasiones, su uso se hacía explícito como instrumento de resolución. Constituyó una lucha cotidiana el suplir los procedimientos espontáneos por otros escritos que, en principio, son más potentes y económicos pero que a la vez son más complejos y ajenos. Aún más allá, pudimos observar que cuando el sistema de cálculo mental ha devenido estático, el acceso significativo al sistema escrito se torna excesivamente difícil. Este caso se presentó en las mujeres mayores. En tal sentido, el proceso de aprendizaje de los jóvenes se mostró incompatible en cuanto a su temporalidad con el de los adultos mayores. Otros estudios (por ejemplo el de Sánchez, 2003) apuntan en la misma dirección.

Es decir que el trayecto que llevó a los participantes a un cierto manejo de los cálculos con lápiz y papel resultó complejo. La pre-existencia de una lógica según la cual debe contarse

primero lo que tiene más valor cuando se suma, o debe completarse aditivamente una cantidad cuando se resta, se hacía presente con frecuencia, dificultando la comprensión y aceptación de los nuevos procedimientos. No obstante este hecho, los jóvenes participantes transitaron del cálculo mental al escrito. El manejo del dinero – principal referente de los conocimientos construidos en la práctica - se muestra como un recurso de primer orden para apoyar dicho tránsito.

Sin embargo, debe señalarse, aún al final de la experiencia algunos participantes evitaban seguir los pasos propios de los procedimientos escritos; lo hacían de la siguiente manera: anotaban el cálculo conforme a la escritura convencional, calculaban mentalmente para resolverlo; si les resultaba necesario, hacían registros no convencionales para ayudar a la memoria, y anotaban con base en todo ello el resultado en el espacio correspondiente en la escritura convencional. Con todo, esto significa un avance en la conquista de la aritmética convencional, puesto que se ganó en capacidad de interacción con las escrituras numéricas y las formas “letradas” de presentación de los problemas. Aunque permanentemente las estrategias previas afloraban, la posibilidad de lidiar exitosamente con las cuentas escritas – independientemente de los procesos intermedios que lleven a la solución correcta – son un logro importante en el tránsito a la matemática escolar, a la vez que una diferencia con quienes no flexibilizaron suficientemente sus esquemas previos y por dicha causa abandonaron el proceso.

Las corrientes actuales en pedagogía coinciden en señalar que la cooperación interindividual no constituye un simple intercambio de ayudas entre individuos, sino que es un proceso generador de ideas y de interpretaciones nuevas. Esta perspectiva es útil para describir los intercambios sucedidos a lo largo del proceso aquí referido. De hecho, la interacción y el trabajo colaborativo resultaron fundamentales en el proceso de apropiación del cálculo escrito.

Este hecho apunta a que con los jóvenes y adultos sin escolaridad, la interacción con los otros, y las contribuciones que esos otros aportan en su propio intento de comprensión de la matemática escrita, es esencial en la comprensión y apropiación del conocimiento matemático en juego. A la luz de los hechos referidos en este trabajo, la situación problemática es sin duda promotora de la puesta en funcionamiento de determinados

esquemas y la búsqueda de ajuste de dichos esquemas a la situación que se presenta; pero la socialización de los puntos de vista y las aportaciones de los diferentes miembros del grupo tienen tanto peso en la apropiación como la interacción con la situación.

En el sistema de educación para jóvenes y adultos mexicano, ante el escaso poder de convocatoria, ha tomado vigencia el trabajo individual con ayuda de un asesor poco preparado. Parece obvio – por lo aquí mostrado – que el proceso de apropiación de las matemáticas escritas con jóvenes y adultos, resultará bastante limitado si se basa en la proposición de situaciones y se espera que, en solitario, los sujetos se apropien de los conocimientos previstos.

Creo haber constatado el valor de las situaciones didácticas en el campo de la educación de jóvenes y adultos, en el sentido de mostrar que la situación obliga a la adaptación de los conocimientos previos y con ello provoca nuevos conocimientos que inicialmente toman forma de estrategias de solución (en el sentido de Brousseau, 1986). Sin embargo, en la escolarización de este sector de población, el intercambio y los aportes que prosiguen a la interacción con la situación, parecen tener un peso mayor que el que G. Brousseau les ha concedido. Numerosos episodios aquí presentados son evidencia de que muy probablemente, de no hacerse con la colaboración de los otros, las tareas no se habrían resuelto exitosamente o se hubiese requerido un largo tiempo para hacerlo. No sobra en empero una precisión, las corrientes socio-culturales postulan que la inter-subjetividad precede a la intra-subjetividad (tal como lo planteó Vigotsky, 1994). La postura asumida en este trabajo no refiere a dicho orden. Como se mostró, la interacción con la situación-problema o la tarea precedía siempre a la discusión; ésta versaba precisamente sobre las dificultades enfrentadas, los procedimientos desarrollados, los errores cometidos y las soluciones construidas al enfrentar las tareas. Es esta discusión, precedida de la acción sobre la situación, la que permitió la reelaboración de los conocimientos previos y la apropiación de los saberes previstos.

De entre las muchas cuestiones que quedan pendientes en este estudio, la noción de reproductibilidad (en el sentido de Artigue, s/f) merece una atención especial. No sólo por la acción no previsible del docente (en este caso el conductor) sino también, y sobre todo, por las características de los aprendices participantes es correcta la duda sobre la

reproductibilidad del proceso. Si concedemos que las personas que llegan a la juventud o a la adultez sin conocer el cálculo escrito tienen tras de sí una experiencia – muchísimo más rica que la de los alumnos-niños – y que esta experiencia ha devenido esquemas de pensamiento matemático más o menos estables y más o menos complejos, según las exigencias cotidianas de cálculo de las personas, cabe la pregunta: ¿Las conductas y respuestas emergidas a lo largo de este estudio, serán repetibles cuando se trate de otros jóvenes y adultos? Por ahora no tenemos respuesta. No obstante, creo haber aportado elementos para entender el tránsito del cálculo ágrafo al cálculo escrito, proceso que Joia ha caracterizado por la presencia permanente, en el aula, de los conceptos y procedimientos contruidos en el espacio cotidiano, y que visto con más detenimiento puede definirse como una batalla por acceder a una nueva significación.

Por último anoto una reflexión sobre los resultados obtenidos y el sistema educativo: fue posible constatar que la idea que sustenta los programas de escolarización de jóvenes y adultos, consistente en creer que unos cuantos meses de pobres experiencias en torno a la matemática escrita son suficientes como formación básica, es una idea errónea que deberá abandonarse si se quiere que el paso por esta parcela del sistema educativo se oriente a algo más que proporcionar certificados acompañados de conocimientos memorísticos y probablemente inútiles.

Referencias

- ARTIGUE, M. (s/f), *Modelización y reporductibilidad en la enseñanza de las matemáticas. Cuaderno de Didáctica de las Matemáticas*. 5. IREM. Universidad de París VII. Traducción de trabajo al español del Departamento de Investigaciones Educativas. CINVESTAV. México
- ÁVILA, A. (1989), *Las estrategias de cálculo aritmético de los adultos no alfabetizados*. Tesis de maestría en Pedagogía, México: UNAM.
- ÁVILA, A. (1990), El saber matemático de los analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*. XX. (3). pp. 55 – 95.
- ÁVILA, A. (1997), Repensando el currículum de matemáticas para la educación de jóvenes y adultos, en Varios autores. *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos* (pp. 101-118). Santiago de Chile: UNESCO.
- ÁVILA, A. (2003), Cálculo escrito y pérdida de significación. *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos*. 4. pp. 22 – 27.
- AVILA, A. (2004), *Una propuesta alternativa de alfabetización en matemáticas: análisis de resultados de una primera experimentación*. Reporte de investigación no publicado. México: Universidad Pedagógica Nacional.
- ÁVILA, A y cols. (1994) *Usos y conceptualizaciones de las fracciones, los decimales y la proporcionalidad. Estudio en adultos analfabetos y de escasa escolaridad*. Reporte de investigación no publicado. México: INEA.
- AVILA A, BECERRA, E. (2004). El trabajo en equipos en la clase de matemáticas. En Avila, A (directora). *La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*. (pp. 103- 164). México: SEP:
- ÁVILA, A., WALDEGG, G. (1997), *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos*. México: INEA.
- BARTH, B. M. (1996), Construire son savoir. En Bourgeois, Étienne (ed). *L'adulte en formation. Regards pluriels*. (Pp. 19 – 36). Bélgica: De Boeck Université. Perspectives en éducation.
- BALACHEFF, N. (1987), Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*. 18. pp. 147 – 176.
- BROUSSEAU, G. (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Tesis de Doctorado de Estado. Francia: Univeridad de Burdeos I.
- CARRAHER, T, CARRAHER, D, SCHLIEMAN, A. (1991), *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo XXI Editores.
- CARVALHO DE LUCHESI, D. (1997). El conocimiento matemático de la práctica y el conocimiento matemático escolar desde la perspectiva del salón de clase, en Varios autores *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos*. (pp. 65 – 76). Santiago de Chile: UNESCO.

- CARVALHO DE LUCHESI, D. (1995), *A interação entre o conhecimento matemático da prática e o escolar*. Tesis de doctorado. Brasil: Universidad de Campinas.
- FLORES, R. del C. (2003), *El conocimiento matemático en problemas de adición y sustracción. Un estudio sobre las relaciones entre conceptos, esquemas y representación. Tesis de doctorado en educación*. México: Universidad Autónoma de Aguascalientes.
- JOIA, O. (1997). Cuatro preguntas sobre la educación matemática de jóvenes y adultos. En Varios autores. *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos* (pp. 27 – 34). Santiago de Chile: UNESCO.
- KNIJNIK, G. (2003). Educación de personas adultas y etnomatemáticas. *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos*. 4. pp. 8 – 12.
- LA JORNADA (2005). En AL y el Caribe 39 millones de analfabetos, reportan CEPAL y UNESCO, México, jueves 3 de febrero, p. 15.
- MARIÑO, G. (s/f), *Cuentas claras*. Bogotá: Dimensión Educativa.
- MARIÑO, G. (1995), Comunicación personal a propósito de la propuesta *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación de adultos*. Bogotá.
- MARIÑO, G. (1997), Los saberes matemáticos previos de jóvenes y adultos: alcances y desafíos. En Varios autores. *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos*. (pp. 77 – 100). Santiago de Chile: UNESCO.
- MARIÑO, G. (1983), *¿Cómo opera matemáticamente el adulto del sector popular? Constataciones y propuestas*. Bogotá: Dimensión Educativa.
- MELOTH, M.S y DEERING, P.D. (1994), Task Talk and Task Awareness Under Different Cooperative Learning Conditions. *American Educational Research Journal*. 31(1). pp. 138-165.
- SÁNCHEZ, C. (2003). Autoaprendizaje de las matemáticas en los grupos del INEA. *Decisio. Saberes para la acción en educación de adultos*. 4. Pp. 12 – 17.
- VERGNAUD, G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité* (1991). Berna: Peter Lang.
- VYGOTSKY, L. (1994), *Pensamiento y lenguaje*. México, Quinto Sol.