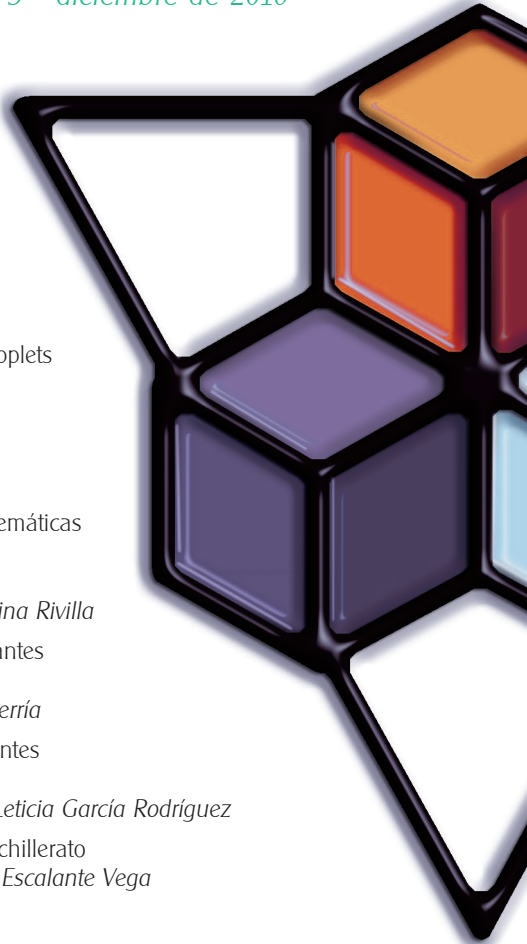




Educación Matemática

México • vol. 28 • núm. 3 • diciembre de 2016

- ❑ Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática
Patricia Sadovsky, Horacio Itzcovich, María Emilia Quaranta, María Mónica Becerril y Patricia García
- ❑ La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo
Alicia Avila
- ❑ Análisis de datos bivariados en un ambiente basado en applets y software dinámico
Santiago Inzunza Cazares
- ❑ El rol de la experimentación en la modelación matemática
Ruth Rodríguez Gallegos y Samantha Quiroz Rivera
- ❑ Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función
Tulio R. Amaya De Armas, Luis R. Pino-Fan y Antonio Medina Rivilla
- ❑ ¿Cuán abundantes son los conjuntos de números? Estudiantes comparando infinitos
Virginia Montoro, Nora Scheuer y Ma. del Puy Pérez Echeverría
- ❑ La argumentación sustancial. Una experiencia con estudiantes de Nivel Medio Superior en clases de matemáticas
Alma Alicia Benítez Pérez, Héctor Benítez Pérez y Martha Leticia García Rodríguez
- ❑ El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato
Heli Herrera López, Abraham Cuesta Borges y Juana Elisa Escalante Vega



Alicia Avila Storer
Editora en Jefe
Universidad Pedagógica Nacional, México

José Luis Cortina
Editor Asociado
Universidad Pedagógica Nacional, México

Comité editorial

Luis Manuel Aguayo
Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas,
México, l_ago@yahoo.com.mx

Gustavo Barallobres
Universidad de Quebec en Montreal
Canadá, barallobres.gustavo@uqam.ca

Leonor Camargo Uribe
Universidad Pedagógica Nacional de Colombia
lcamargo@pedagogica.edu.co

Ceneida Fernández Verdú
Universidad de Alicante, España,
ceneida.fernandez@ua.es

Josep Gascón
Universidad Autónoma de Barcelona, España
gascon@matuab.es

Salvador Llinares Ciscar
Universidad de Alicante, España
sllinares@ua.es

Paulino Preciado Babb
Universidad de Calgary, Canadá
paulinopreciado@gmail.com

Luis Radford
Université Laurentienne, Canadá
Lradford@nickel.laurentian.ca

Ana Isabel Sacristán Rock
Departamento de Matemática Educativa,
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados,
IPN, México, asacrist@cinvestav.mx

Diana Violeta Solares
Universidad Autónoma de Querétaro, México
violetasolares@yahoo.com.mx

María Trigueros Gaisman
Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico
Autónomo de México, México
trigue@itam.mx

Avenilde Romo Vázquez
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y
Tecnología Avanzada (CICATA), Instituto Politécnico
Nacional, México, avenildita@gmail.com

Mario Sánchez Aguilar
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y
Tecnología Avanzada (CICATA), Instituto Politécnico
Nacional, México, mosanchez@ipn.mx

Gloria Sánchez-Matamoros
Universidad de Sevilla, España,
gsanchezmatamoros@us.es

Ernesto Sánchez Sánchez
Departamento de Matemática Educativa,
Centro de Investigación y de estudios Avanzados,
IPN, México, esanchez@cinvestav.mx

Armando Solares Rojas
Universidad Pedagógica Nacional, México
asolares.rojas@gmail.com

Yolanda Chávez
Gestión de arbitrajes

Rodolfo Méndez
Gestión y operación

Producción

Formas e Imágenes, S.A. de C.V.
Diseño y corrección, formaseimagenes@gmail.com

Leticia Pérez Solís
Diagramación, letips.mx@gmail.com

EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada, que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y modelos que puedan ejercer una influencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. EDUCACIÓN MATEMÁTICA aparece tres veces al año y es indexada en ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik), MathDi (MathEducDatabase), Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Latindex, REDALYC (Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal), Scientific Electronic Library Online (SCIELO) y Clase (Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades). Las colaboraciones son recibidas en la plataforma www.autores-educacion-matematica.com. Mantenemos el contacto: revedumat@yahoo.com.mx

Educación Matemática



Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

Educación Matemática vol. 28 • núm. 3 • diciembre de 2016

© EDUCACIÓN MATEMÁTICA, diciembre de 2016, vol. 28, núm. 3, es una publicación cuatrimestral (abril, agosto, diciembre) editada por la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., con domicilio en Guty Cárdenas 121-B, Col. Guadalupe Inn, 01020, Ciudad de México, correo electrónico revedumat@yahoo.com.mx.

Editora responsable: Alicia Ávila Storer. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2015-10163264600-203, ISSN en trámite, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de EDUCACIÓN MATEMÁTICA, vol. 28, núm. 2, agosto de 2016, son propiedad de D.R. © Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C.

Diagramación y corrección de estilo: Formas e Imágenes, S.A. de CV, Av. Universidad 1953, edif. 2, loc. E, Copilco el Bajo, Coyoacán, 04330, Ciudad de México, formaseimagenes@gmail.com

www.revista-educacion-matematica.org.mx

Contenido

Editorial	5
-----------	---

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática	9
---	----------

Tensions and Challenges in the construction of a Collaborative Work among Teachers and Mathematics Education Researchers

Patricia Sadovsky, Horacio Itzcovich, María Emilia Quaranta, María Mónica Beceril, Patricia García

La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo	31
--	-----------

Research in Mathematics Education in México: Looking at 40 Years of Work

Alicia Avila

Análisis de datos bivariados en un ambiente basado en applets y software dinámico	61
--	-----------

Bivariate Data Analysis in an Environment Based on the use of Applets and Dynamic Software

Santiago Inzunza Cazares

El rol de la experimentación en la modelación matemática	91
---	-----------

The Role of Experimentation in Mathematical Modeling

Ruth Rodríguez Gallegos y Samantha Quiroz Rivera

Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función	111
---	------------

Evaluation of the Knowledge of Future Teachers of Mathematics about the Transformation of the Representations of a Function

Tulio R. Amaya De Armas, Luis R. Pino-Fan y Antonio Medina Rivilla

¿Cuán abundantes son los conjuntos de números?	
Estudiantes comparando infinitos	145
How Abundant are the Sets of Numbers? Students Comparing Infinite Sets of Numbers	
<i>Virginia Montoro, Nora Scheuer y Ma. del Puy Pérez Echeverría</i>	
La argumentación sustancial. Una experiencia con estudiantes de Nivel Medio Superior en clases de matemáticas	175
Substantial Argumentation. An Experience with High School Level Students in Math Classes	
<i>Alma Alicia Benítez Pérez, Héctor Benítez Pérez y Martha Leticia García Rodríguez</i>	
 CONTRIBUCIONES A LA DOCENCIA	
El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato	217
The variable concept: an analysis with high school students	
<i>Heli Herrera López, Abraham Cuesta Borges y Juana Elisa Escalante Vega</i>	
 Política editorial	241
 Árbitros 2016	249

La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo

Research in Mathematics Education in México: Looking at 40 Years of Work¹

Alicia Avila²

Resumen: En México, la investigación en el campo de la educación matemática surgió en los años setenta del siglo xx, centrada en los procesos cognitivos de los estudiantes y el estudio histórico de los conceptos matemáticos que se enseñan en la educación superior. Con el paso del tiempo, y la incorporación de nuevas teorías y herramientas metodológicas, el foco de atención se desplazó y diversificó. El estado actual de la investigación es resultado de un recorrido con cambios y expansiones, tanto en nuestras concepciones de los objetos y sujetos de estudio como en las teorías y las metodologías utilizadas. Con base en una revisión de los trabajos realizados en México sobre el tema, expongo la evolución de la investigación en el campo de la educación matemática, sus objetivos, metodologías, marcos referenciales y tareas pendientes. Espero que las experiencias de la comunidad mexicana, presentadas desde mi propia interpretación, también sean útiles a los investigadores de otros países para mirar su propia acción.

Palabras clave: *educación matemática, historia de la investigación, estado del arte, metodologías de investigación, enfoques de investigación, desarrollo de la investigación.*

Fecha de recepción: 22 de mayo de 2016. **Fecha de aceptación:** 24 de septiembre de 2016.

¹ Una versión preliminar de este artículo fue presentada como conferencia plenaria en la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, efectuada en Tuxtla Gutiérrez, Chis, México, en mayo de 2015. No se publicaron memorias de dicho evento.

² Universidad Pedagógica Nacional. México. aliavi@prodigy.net.mx.

Abstract: In México, research in the domain of mathematics education emerged in the 1970's. It focused mainly on the cognitive processes of students, and on the history of mathematical concepts taught in higher education. Over the years, with the incorporation of new methodological tools, the focus shifted and diversified. The current state of research is the result of a path with changes and expansions in both our conceptions of objects and subjects of study, as well as in the theories and methodologies we use. Based in a review of the work developed in México, I discuss the evolution of research in mathematics education: concerns, goals, methodologies and tasks to be performed. I hope that the experiences of the Mexican community, presented from the author's interpretation, are also useful to researchers from other countries to look at their own doing.

Keywords: *mathematics education, research history, research development, state of the art, research methodologies, research approaches.*

ACLARACIONES NECESARIAS

Este artículo está sustentado en el trabajo de muchas personas, realizado a lo largo de varias décadas; de hecho constituye una síntesis personal de los tres recuentos de la investigación conocidos en México como *Estados del conocimiento en educación matemática*, que se han elaborado por convocatoria del Consejo Mexicano de Investigación Educativa, y en los cuales participé con otros colegas como autora o coordinadora (Block y Waldegg, (coords.), A. Avila, E. Mancera, T. Rojano, M. Rigo, A. Gallardo, E. Sánchez, P. Morfin, G. Zubieta, C. Acuña y E. Bonilla (1995); Avila y Mancera, (coords.), L. M. Aguayo, D. Block, A. Carvajal, P. Camarena y D. Eudave (2003); y Avila (coord.), D. Block, A. Carvajal, P. Camarena, D. Eudave, I. Sandoval y A. Solares (2013)). En estos “estados del arte” se buscó recuperar la investigación más representativa de cada uno de los periodos analizados, aunque sin haber conseguido exhaustividad en algún caso. No obstante tal limitante, estos textos son los referentes más sistemáticos y completos sobre la investigación en educación matemática con los que a la fecha se cuenta en México. Conviene por ello mencionar, aunque brevemente, la metodología de recolección y selección de los trabajos.

En el caso de los tres recuentos efectuados, se procedió de manera similar, aunque la circunstancia específica de cada periodo llevó a hacer ajustes en la recolección y selección de los trabajos. Para la recolección se invitó a

investigadores reconocidos³ a enviarnos sus publicaciones, también se solicitó a centros de posgrado en educación matemática hacernos llegar las tesis de sus graduados y, adicionalmente, se colectaron trabajos por medio de vínculos personales y búsquedas en bibliotecas y revistas de investigación.

La selección de los escritos se hizo de manera relativamente diferente en cada etapa, puesto que el avance del campo permitió establecer criterios cada vez más rigurosos en la selección de las investigaciones (cf. Avila, coord., 2013). De este modo, si en el periodo inicial (ver adelante) fueron considerados incluso libros de texto y propuestas curriculares, en el correspondiente a este siglo XXI sólo se incorporaron trabajos publicados en revistas mexicanas certificadas por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología –*Educación Matemática y Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*–, así como en otras revistas de educación también certificadas por dicho organismo, en las que los investigadores de este campo publican ocasionalmente. Adicionalmente se incorporaron artículos de colegas mexicanos difundidos en revistas extranjeras de reconocimiento y circulación internacional.

Otra cuestión que es importante aclarar se refiere a la organización temática de las investigaciones al hacer los recuentos, la cual se hizo conforme a dos criterios que los grupos de trabajo consideramos pertinentes en su momento:

1. La presentación conforme a los niveles que constituyen el sistema educativo mexicano: educación preescolar y primaria, educación secundaria, educación media superior (bachillerato) y educación superior. En la educación primaria se consideró también la que se dirige a los jóvenes y adultos analfabetos, o con escasa escolaridad.
2. Al interior de cada nivel educativo, los trabajos fueron organizados de acuerdo con los elementos del clásico triángulo didáctico (Chevallard, 1991): el saber, el maestro y los alumnos, así como las interacciones entre estos elementos.

Lo que expongo enseguida es la interpretación que he hecho de los recuentos de la investigación al paso del tiempo; incluyo además informaciones

³ Con el término “reconocidos” me refiero a investigadores que cuentan con una trayectoria amplia de investigación, cuyos trabajos son consultados y citados en la comunidad; así mismo, aludo a los que han sido certificados por el Sistema Nacional de Investigadores.

complementarias más recientes, que contribuyen a caracterizar mejor la investigación tema del escrito.

Una última aclaración: me disculpo con los autores de los trabajos recontados en los *Estados del conocimiento*, y también con los lectores, porque el espacio disponible en un artículo hace imposible citar –tan directa y ampliamente como desearía– la enorme cantidad de escritos recopilados.

LOS INICIOS: 1975-1990⁴

EL CONTEXTO

Como disciplina autónoma y con orientación sistemática hacia la investigación, la educación matemática en México tuvo sus orígenes en la década de 1970. Varias acciones generaron el contexto propicio para ello. Una de las primeras fue la creación de una maestría en ciencias con especialidad en matemática educativa, impulsada por un grupo de colegas de la Sección de Matemática Educativa del Cinvestav (cf. Block y Waldegg, coords., 1995).

La maestría inició en 1975, aunque sería hasta 1980 cuando se propuso la formación de especialistas en educación matemática con orientación hacia la investigación. De cualquier manera, con esta maestría se preparó el terreno para la creación del campo de la educación matemática.

Poco después se abrió el doctorado, y las primeras tesis para obtener este grado se presentaron a finales de 1980. Entre esas tesis se contaban las de Teresa Rojano, Guillermina Waldegg, Olimpia Figueras y Ricardo Cantoral.

En ese tiempo también aparecieron las primeras publicaciones mexicanas en educación matemática. Hacia 1984 se inició la difusión de trabajos de investigación por medio de los *Cuadernos de Investigación del Programa Nacional de Formación de Profesores de Matemáticas*, impulsada por la Sección de Matemática Educativa del Cinvestav. En 1986 fueron publicados los primeros *Cuadernos del Laboratorio de Psicomatemáticas del Departamento de Investigaciones Educativas*, también del Cinvestav. La *Primera Memoria de las Reuniones Centroamericanas y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* apareció en 1987. Con la revista *Educación Matemática*,

⁴ Este inciso está basado en el recuento de la investigación coordinado por David Block y Guillermina Waldegg (1995), aunque he revisado y/o complementado algunos datos y, por supuesto, he incorporado mis propias interpretaciones. La ficha completa del texto mencionado se anota en la bibliografía.

creada en 1989, dio inicio la publicación periódica, en español, de investigaciones en este campo.

Desde aquel entonces, la actividad de investigación fue alimentada por el vínculo con colegas extranjeros, cuyos intercambios se efectuaron mediante convenios institucionales, principalmente los que celebró la Sección de Matemática Educativa con el King's College de la Universidad de Londres, o con el Institut de Recherche pour L'Enseignement des Mathematiques (IREM) de París, y el de Estrasburgo en Francia.

LA INVESTIGACIÓN EN EL PERIODO INICIAL

Hace más de 25 años un grupo de colegas encabezado por Guillermina Waldegg, y a petición del Consejo Mexicano de Investigación Educativa, nos dimos a la tarea de hacer el recuento de la investigación llevada a cabo en el período 1980-1990. Fue la primera oportunidad de explorar, organizar y tratar de entender el conjunto de la producción de una comunidad que entonces estaba en vías de constitución.

La intención específica para cumplir el encargo fue considerar artículos publicados en el rubro de investigación, así como tesis de maestría y doctorado elaboradas en instituciones mexicanas. Conforme tal intención, inicialmente se eligieron los trabajos de investigación en donde se explicitaban claramente los objetivos, la metodología utilizada y los resultados obtenidos con base en dicha metodología; sin embargo (y cito a Guillermina Waldegg, 1995): "Puesto que estos trabajos eran muy escasos se incluyeron otros aun cuando carecieran de algunos de estos elementos".

En tal sentido es conveniente aclarar que una parte importante de la producción de aquella época estuvo directamente vinculada al Sistema Educativo Nacional y se concretó en productos de desarrollo fundamentados en resultados de investigación, tales como propuestas curriculares, libros de texto y guías para maestros. Puesto que una parte importante del trabajo se tradujo en este tipo de publicaciones, estas fueron incluidas también en el recuento de la investigación.

En aquel periodo la comunidad compartía ya dos hipótesis, una de ellas era que:

Conocer las concepciones de los estudiantes, sus dificultades en el aprendizaje y los errores que cometen al tratar de aprender, constituye un punto de apoyo esencial para la construcción de propuestas de enseñanza productoras de aprendizajes significativos.

Esta hipótesis dio lugar a estudios de tipo cognoscitivo, generalmente llevados a cabo con un número pequeño de sujetos y basados en:

- Aplicación de exámenes de respuestas abiertas.
- Entrevistas tipo interrogatorio crítico (metodología piagetana).
- Análisis cualitativo de los datos.

Un gran número de estas investigaciones se enfocaron en la educación básica y estaban centradas en los alumnos y sus procesos cognitivos.

La segunda hipótesis, asumida principalmente por quienes trabajaban en el nivel medio y superior, fue la siguiente:

La historia de la construcción de los conceptos matemáticos arroja luz sobre los procesos de construcción de dichos conceptos en los estudiantes y por lo tanto es útil para definir propuestas didácticas.

De esta hipótesis derivaron estudios orientados al análisis del saber en varias modalidades:

- Estudio de la génesis histórica de ciertos conceptos.
- Estudio de cómo esos conceptos fueron plasmados en textos antiguos.
- Estudio de las maneras en que son presentados en textos modernos.
- Estudio de obstáculos epistemológicos propios de las nociones examinadas.

Habiendo esbozado el contexto de la producción de aquella etapa inicial, me enfoco enseguida en la investigación elaborada en cada uno de los niveles educativos mencionados al inicio del escrito; lo anterior en concordancia con la organización adoptada en los “estados del conocimiento”. De esta manera procederé a lo largo del escrito.

Educación primaria y preescolar

En este nivel educativo la aritmética fue el contenido principal de este tipo de estudios. T. Kieren, K. Hart y el CSMS Mathematics Team,⁵ G. Vergnaud, T. Carpenter

⁵ Las siglas refieren a “The Concepts in Secondary Mathematics and Science, Mathematics Team”, equipo de investigación encabezado por K. Hart que realizó en Inglaterra estudios pioneros sobre la comprensión en matemáticas.

y J. Moser fueron inspiración y marco para muchas de las investigaciones vinculadas con la *educación primaria y preescolar* que entonces se realizaban. Al interior de ese conjunto de estudios prevalecieron los enfocados en los números naturales, la resolución de problemas aritméticos y los procesos y dificultades para aprender las fracciones.

Otra vertiente de indagación vinculada con la educación primaria gestada en esa época, y de gran relevancia social en nuestro país, fue la orientada a identificar y analizar los saberes matemáticos –principalmente aritméticos– de los adultos sin escolaridad. En concordancia con las declaraciones de la UNESCO, que por primera vez reconocía que: “Los analfabetos no son unos ignorantes, sino personas que poseen estructuras lógicas claras e importantes experiencias laborales”,⁶ y como respuesta a la necesidad de mejorar los materiales utilizados en los servicios de educación de adultos, se desarrollaron algunas indagaciones, de las cuales se desprendió la siguiente conclusión: “En general, los analfabetos son competentes para resolver los problemas que su cotidianidad les presenta; tienen un pensamiento aritmético bastante estructurado, y conforme a ese sistema, utilizan estrategias propias de resolución de muchos de los problemas a los que se enfrentan” (Avila, 1990).

También durante este periodo se inició el desarrollo de una línea de investigación experimental, centrada en la educación primaria, que se traduciría en propuestas educativas y materiales para la enseñanza de las matemáticas escolares.⁷

Educación secundaria

En este nivel educativo destacaron desde ese entonces los trabajos vinculados al álgebra que se enseñaba en él; se llevaron a cabo estudios de análisis curricular, de identificación y análisis de errores en el uso del álgebra y, especialmente, en lo referente a la adquisición del lenguaje algebraico y el tránsito de la aritmética al álgebra.⁸ Fueron varios los trabajos dedicados al aprendizaje de esta rama de las matemáticas utilizando entornos computacionales, o los que

⁶ Conferencia Mundial de la UNESCO sobre Educación de Adultos, celebrada en 1975 en Persépolis.

⁷ En esta etapa y línea destacaron los trabajos realizados por David Block e Irma Fuenlabrada en el Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav.

⁸ Sin duda, los trabajos de Teresa Rojano y Eugenio Filloy fueron clave del desarrollo en este tema desde aquel periodo. Resulta imposible citar específicamente cada uno de sus trabajos.

experimentaban con calculadoras. L. Booth, M. Matz, K. Hart y C. Kieran fueron referentes importantes en el desarrollo de este tipo de estudios.

El nivel medio superior y superior

Las cosas iban por otros caminos en este nivel educativo. El cálculo fue la espina dorsal de la indagación; los trabajos en esta temática, según Block y Waldegg (1995, coords.) se orientaron a estudiar los procesos de construcción de ideas y conocimientos por parte de los estudiantes, realizándose investigaciones basadas en la teoría piagetana (estadios en la construcción de las ideas y mecanismos de tránsito de un estadio a otro) o en los planteamientos de Tall y Vinner (que buscan determinar las imágenes que los alumnos tienen sobre los conceptos, y los obstáculos que enfrentan al elaborarlos).

El interés por el cálculo también estuvo orientado al análisis del saber en las modalidades antes anotadas: se estudió la génesis histórica de ciertos conceptos y la forma en que fueron plasmados en textos antiguos; fueron examinadas las maneras en que son presentados en textos modernos, o se identificaron obstáculos epistemológicos propios de las nociones examinadas.⁹ Todo lo anterior fue considerado un recurso para la comprensión y explicación de los mecanismos de apropiación y construcción del conocimiento matemático y la creación de opciones de enseñanza, por lo que también se realizaron estudios tendientes a desarrollos alternativos de los contenidos; un ejemplo notable de ello, según señalaron quienes hicieron el recuento de estas investigaciones, fue un curso de cálculo con base en cantidades infinitamente pequeñas, propuesto por Carlos Imaz (1985) (cf. Block y Waldegg, coords., 1995).

La geometría tuvo un lugar más modesto en las investigaciones de la época. Aunque se inició la discusión acerca de su lugar en el currículum, la demostración en esta rama de las matemáticas, y también se diseñaron situaciones para contribuir a desarrollar este tipo de pensamiento, los investigadores ocupados en el tema fueron pocos,¹⁰ y predominaron las ponencias y las tesis de maestría como formas de elaboración y difusión de los trabajos. El caso de la probabilidad fue similar, aunque aquí el número de investigadores fue aún menor.

⁹ Respecto de estas temáticas, amerita una mención el conjunto de trabajos realizados o dirigidos por Luis Moreno en esa época.

¹⁰ En el recuento del periodo aparecen mencionados los trabajos de C. Acuña, G. Zubieta y G. López-Rueda.

Un punto que conviene destacar es que, en general, en todos los niveles educativos se reportaba escasa comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. Sin embargo, la investigación de esos tiempos aportó mucho más que el conocimiento de esta escasa comprensión. Además de ciertos desarrollos experimentales o curriculares, se identificaron las estrategias, aproximaciones y recursos personales con que los niños de primaria y jóvenes de secundaria o de niveles superiores de escolaridad, así como las personas no escolarizadas, trataban de enfrentar las tareas matemáticas que se les proponían. Es decir, se documentó *el otro pensamiento matemático*, que hasta entonces no era desconocido. Considero que este fue el gran aporte de aquel periodo.¹¹

Para dar una panorámica del número y tipo de trabajos producidos en aquellos años (287), se inserta la tabla 1, que resume la producción por temas y tipo de publicación.

Tabla 1. Producción de investigación, por tema matemático, 1980-1990.

	Ponencia	Artículo	Documento/ propuesta	Tesis maestría	Tesis doctorado
Álgebra y pre-Álgebra	15	3	4	5	1
Aritmética	20	11	11	12	1
Geometría	19	2	2	9	1
Medición	1	0	1	1	0
Trigonometría	1	1	0	1	0
Probabilidad y estadística	9	2	0	8	0
Cálculo	24	8	1	19	2
Razonamiento matemático	1	1	1	1	0
General	5	18	3	3	0
Tics General	21	3	1	0	0
Tics Álgebra	8	3	0	1	0
Tics Geometría	9	0	0	2	0
Tics Cálculo	10	1	0	0	0
TOTAL	143	53	24	62	5

¹¹ La expresión "el otro pensamiento matemático" es una elaboración personal.

Puede verse que la aritmética, el cálculo, el álgebra y la pre-álgebra, así como la geometría, fueron los temas dilectos de los investigadores, y también que dichos temas se estudiaron con distintos niveles de profundidad.

1991-2000: LA EXPANSIÓN¹²

En los años noventa, el impulso que tomó la investigación en educación matemática se dejó sentir en un crecimiento tanto de la cantidad como de la calidad de los trabajos. En mi opinión fue una etapa de franca expansión en ambos sentidos.¹³

Las tesis de doctorado se triplicaron en esa década. Las tesis de maestría y los artículos, *grosso modo*, duplicaron sus números. El peso relativo de las ponencias disminuyó, aunque continuaron siendo la forma privilegiada de difundir los resultados de la investigación (41%). En el tabla 2 se puede advertir el crecimiento cuantitativo de la investigación experimentado en ese entonces.¹⁴

Tabla 2. Comparación de la producción de investigación de dos décadas: 1980 y 1990.

Década	Tesis de maestría	Tesis de doctorado	Ponencias	Artículos	Capítulos de libro	Libros	Otros	Total
1980	62	5	143	53	0	0	24	287
1990	105	16	176	107	16	7	4	431
	167	21	319	160	16	7	28	718

En 1991-2000 las vertientes de investigación constituidas en los años ochenta se mantuvieron activas, pero hubo dos factores que contribuyeron de manera importante al curso que tomarían entonces los trabajos:

¹² El análisis de este periodo se sustenta en el texto de Avila, A. y E. Mancera (coords.), L. M. Aguayo, D. Block, A. Carvajal, P. Camarena y D. Eudave (2003). "El campo de la educación matemática, 1993-2001" (la ficha completa está en la bibliografía).

¹³ Sé que el término "calidad" es complejo y no es unívoco. Para los fines de este escrito, con dicho término me refiero a una investigación realizada con rigor metodológico, respaldo teórico, análisis profundos y conclusiones derivadas lógicamente de las evidencias presentadas.

¹⁴ El lector puede consultar en el Anexo A, los cuadros con las cifras correspondientes a los temas matemáticos abordados en las investigaciones llevadas a cabo durante este periodo y el siguiente.

1. Las tecnologías impactaron fuertemente las investigaciones en la educación secundaria y comenzaron a cobrar presencia en la media superior (cf. Aguayo, 2003 y Eudave, 2003).
2. En el nivel de educación primaria y preescolar la introducción de una reforma educativa (reforma constructivista de 1993) favoreció el desarrollo de estudios sobre las prácticas de enseñanza de las matemáticas en ese nivel educativo (cf. Avila, Block y Carvajal, 2003).

EDUCACIÓN PREESCOLAR Y PRIMARIA

La línea de investigación centrada en los aprendizajes y procesos cognitivos de los estudiantes permaneció vigente en estos niveles educativos. Esta vertiente, siempre centrada en la aritmética, informó, entre otras cosas, que las fracciones persistían como el gran reto de la educación primaria.

Hacia finales de los años ochenta e inicios de los noventa, se multiplicaron las publicaciones sobre la resolución de problemas y las que reflejaban la preocupación por conocer qué tanto los niños comprendían las fracciones y las expresiones con las cuales estas se representan, o los distintos significados de estos números según el modelo de Thomas Kieren.

Reflejo de un cambio en nuestras concepciones sobre el papel del profesor en los aprendizajes de los alumnos, se abrió en este periodo una vertiente de investigación interesada en el pensamiento docente. Gracias a los pocos estudios efectuados entonces sobre el tema, se comenzó a saber acerca de las limitadas concepciones que tienen los docentes sobre la geometría y el volumen, o de su escaso manejo de la proporcionalidad (cf. Avila, Block y Carvajal, 2003).

Con base en los aportes de la línea experimental, iniciada en la etapa anterior, se ofrecieron a los docentes de educación primaria recursos para apoyar la enseñanza, y a los niños situaciones y materiales interesantes para aprender. Varias de las situaciones experimentadas fueron incluidas en los programas y libros escolares introducidos con la reforma curricular de 1993.

Aunque no se indagó con suficiencia sobre el funcionamiento de dichas situaciones cuando pasaron a manos de los profesores, el análisis de las prácticas escolares en matemáticas constituyó una novedad en esta etapa. Gracias a este tipo de investigaciones supimos acerca de distancias importantes entre el hacer magisterial y las intenciones oficiales concretadas en los materiales educativos, de la poca comprensión de las propuestas por parte de muchos

profesores, o de las transformaciones –a veces radicales– que operaban sobre las innovaciones; también supimos de su resistencia a aceptar que, como lo sugerían los nuevos lineamientos, los niños podrían aprender, interactuando con las situaciones y problemas y con los compañeros, lo que sus profesores no les habían enseñado. Junto con lo anterior, la investigación nos permitió saber que los aprendizajes escolares seguían siendo muy modestos, no obstante las ambiciosas intenciones de mejora introducidas con la reforma.¹⁵

LA SECUNDARIA

La reforma a las matemáticas instrumentada en 1993 no fue motivo de investigación en la secundaria. En este nivel educativo, el enfoque en el alumno como sujeto cognoscente continuó siendo el eje del quehacer investigativo. El álgebra y la pre-álgebra se mantuvieron como temas privilegiados por parte de los investigadores; sólo la aritmética registró un número considerable, aunque menor, de investigaciones, y emergió la probabilidad como tema de indagación en secundaria.¹⁶

La orientación cognoscitiva centrada en el álgebra, sin duda derivó en importantes beneficios: permitió re-conceptualizar el aprendizaje de un tema nodal de la educación secundaria, e incorporar a planes y programas de estudio nuevas propuestas de enseñanza. La investigación proporcionó, además, abundantes evidencias de cómo ciertos instrumentos –principalmente la computadora o las calculadoras graficadoras– pueden contribuir a mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Empero, el hecho de que los resultados fueran logrados generalmente en situaciones experimentales, apartadas de las condiciones reales de nuestras escuelas, dejó pendiente el estudio de los eventuales beneficios de estos recursos en el seno de las condicionantes que imponen el sistema educativo y sus actores. Quedaría para el futuro el estudio de la transposición que los profesores habrían operado sobre las propuestas oficiales, o sus reacciones a la incorporación de las innovaciones tecnológicas cuyas bondades, por lo general, habían sido examinadas en situaciones controladas.

¹⁵ Sobre este tema pueden verse los trabajos realizados o coordinados por A. Avila durante el periodo.

¹⁶ Ana María Ojeda y Ernesto Sánchez han sido pilares del desarrollo de esta línea de investigación.

EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

En este nivel también se mantuvo el predominio del enfoque cognitivo. Entre 61 investigaciones analizadas, 44 se dedicaron a examinar los niveles de conocimientos matemáticos que poseen los estudiantes, o a detectar y caracterizar las estrategias que utilizan para resolver los problemas que los investigadores les presentan (cf. Aguayo, 2003).

Otra característica de la investigación desarrollada en este nivel educativo durante el periodo es que el cálculo se mantuvo como el contenido matemático más abordado: a él se dedicaron casi la mitad de las investigaciones identificadas.

Los estudios basados en el uso de la tecnología realizados entonces en bachillerato, que aún eran pocos, se ocuparon principalmente de valorar las potencialidades de la calculadora graficadora o de algún software, como el *Cactusplot*, si bien se iniciaba ya la experimentación con el *Cabri-Géomètre*.¹⁷ Estos estudios se llevaron a cabo en condiciones experimentales, sin la participación de profesores ordinarios, sino con profesores que colaboraron bajo orientación y supervisión de los investigadores. Al igual que en secundaria, quedó para el futuro estudiar el traslado de dichas experiencias al ámbito natural de las escuelas públicas del país.

Por otra parte, las pocas veces que se estudió a los profesores de bachillerato en esta etapa, se exploraron los conocimientos que poseen (principalmente sobre el cálculo) y muy escasamente fueron estudiados los procesos de enseñanza o la interacción establecida con los estudiantes.

La educación superior comparte un rasgo con la realizada en el nivel medio superior durante esta década: el enfoque en el cálculo. Empero, la orientación predominante diferencia los trabajos de uno y otro nivel; en el superior, el principal interés sería el análisis del saber, tal como se describió en el apartado *La investigación en el periodo inicial*; los estudios sobre los procesos de adquisición o el dominio de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes fueron menos que en el bachillerato. Esta disminución numérica se observa también en las investigaciones sobre los profesores, que –al igual que las que refieren al bachillerato– tienden a destacar los limitados conocimientos con que cuentan para impartir sus clases.

¹⁷ Los trabajos pioneros de L. M. Santos y de L. Moreno fueron esenciales para el desarrollo de la investigación que incorporó la tecnología como herramienta para el aprendizaje.

La enseñanza en la educación superior fue abordada a través de la experimentación: fueron exploradas las bondades de las nuevas tecnologías, o se plantearon propuestas de organización de contenidos en situaciones controladas. Las condiciones en las que se lleva a cabo la enseñanza común, como nos fue posible constatar, no constituyeron tema en este nivel educativo.

EL SIGLO XXI: LA MADUREZ¹⁸

EDUCACIÓN PRIMARIA

Durante el periodo, el enfoque en lo cognitivo se vio muy disminuido en este nivel educativo. Sin embargo, continuaron las indagaciones con este enfoque en las fracciones y algunas propuestas para su enseñanza, así como sobre el sistema decimal de numeración y los problemas aritméticos con números naturales. La novedad en esta vertiente la constituyó el acercamiento a los números decimales y la interpretación de gráficas, así como la profundización en torno a la proporcionalidad. Continuaron siendo escasos los trabajos sobre probabilidad, geometría y medición.

Una nueva vía de indagación en este nivel educativo la constituyeron las investigaciones orientadas a ponderar lo que se ha dado en llamar el *logro educativo en matemáticas*, realizadas con grandes muestras de estudiantes, a partir de pruebas estandarizadas elaboradas y aplicadas por instituciones gubernamentales dedicadas a dicha tarea.¹⁹

El análisis de las prácticas de enseñanza, aún con el impulso del interés generado por la introducción de la reforma a las matemáticas en 1993 (vigente hasta 2009), alcanzó cierta robustez en esta etapa. Además de estudiarse los procesos de apropiación de la reforma, se analizó la enseñanza de algunos contenidos específicos. Aquí lo que llama la atención es el hecho de que sólo una investigación se ocupó de las prácticas de formación inicial de los docentes,

¹⁸ Lo que se afirma respecto a este periodo se sustenta en el texto Avila, A. (coord.), D. Block, A. Carvajal, P. Camarena, D. Eudave, I. Sandoval y A. Solares (2013). "La investigación en educación matemática en México: 2002-2011" (la ficha completa está en la bibliografía).

¹⁹ El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación ha aplicado en muestras representativas de nivel nacional exámenes para ponderar los logros educativos desde el ciclo escolar 2004-2005. Dichas pruebas se conocen con el nombre de EXCALE (Exámenes nacionales de la calidad del logro educativo) y están a disposición del público en el sitio web del Instituto.

la cual se efectuó tomando como tema las fracciones. Los escritos de A. Thompson, G. Brousseau e Y. Chevallard fueron útiles como marcos conceptuales de todos estos trabajos.

De manera distinta a como ocurrió con la calculadora en los años noventa –que mereció muy escasa atención como objeto de indagación (cf. Avila, Block y Carvajal, 2003)–, la introducción masiva de otra innovación tecnológica en el sexenio presidencial 2000-2006 –la plataforma informática Enciclomedia²⁰– generó varias investigaciones en la educación primaria. Estos estudios fueron principalmente realizados con la intención de construir situaciones y actividades de aprendizaje de las matemáticas, cuya eficacia se probara antes de su implementación en las escuelas.²¹

Otra vertiente que se vio fortalecida en el periodo fue la dedicada a la educación matemática elemental de jóvenes y adultos, y saberes no escolares. Después de un *impasse* en los años noventa, se avanzó tanto cuantitativa como cualitativamente, pues al crecimiento en el número de investigadores en el tema, lo acompañó una ampliación de las miradas y los objetos de investigación. Al estudio de los saberes no escolares propio de la fase inicial se agregan otros temas: el vínculo entre estos saberes y los de la escuela, los procesos de estudio de las matemáticas en el servicio educativo, los contratos didáctico-institucionales que rigen estos procesos, la aplicación de propuestas didácticas y, finalmente, la indagación sobre la forma en que los saberes “viven” fuera de la escuela, en los contextos de su producción.²²

La incorporación de enfoques socio-culturales hizo posible mirar de manera más comprehensiva todos estos fenómenos; en particular, las nociones de praxeología de Yves Chevallard (1999) y de cognición situada de Jean Lave (1991) fueron elementos clave en el desarrollo de estos trabajos.

²⁰ Enciclomedia fue un sistema de *e-learning* conformado por una base de datos diseñada a partir de los libros de texto gratuitos de quinto y sexto grados de primaria, que contenía una versión electrónica de los propios libros, ficheros de actividades, *links* a informaciones y actividades adicionales o complementarias (muchas veces interactivas), siempre ligadas al contenido de los libros de texto. Enciclomedia se introdujo en las escuelas durante el sexenio presidencial 2000-2006.

²¹ En particular, considero relevantes los trabajos de M. Trigueros y sus colaboradores o colegas, que dedicaron a este tema numerosos estudios y varios años.

²² Sobre este tema creo importante mencionar los trabajos de M. de Agüero (2006) y de D. Solares (2012).

EDUCACIÓN SECUNDARIA

En el transcurso de este periodo, en la secundaria continuó la preferencia por los procesos cognitivos, particularmente en lo referente a los procesos de desarrollo del pensamiento algebraico. Destacaron en esta década los trabajos sobre la comprensión de la variable y un número considerable de investigaciones acerca de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) como herramientas que favorecen el aprendizaje y desarrollo de conceptos. En esta línea se enfatizó la ampliación de los sistemas de representación que permiten las herramientas tecnológicas, así como la significación que logran los alumnos gracias a dicha ampliación. R. Duval y P. Rabardel se cuentan entre las referencias importantes (cf. Eudave, 2013).

Un grupo de trabajos sobre las TIC merecen comentario especial, porque en sus conclusiones aluden a las condiciones de la eventual aplicación de las innovaciones en las escuelas ordinarias. Se concluye que para obtener beneficios realmente importantes en el aprendizaje de las matemáticas es necesario que se cubran ciertas condiciones, como una cuidadosa planeación didáctica, el diseño y prueba de materiales de instrucción, estrategias de capacitación y seguimiento de los profesores, mantenimiento y actualización permanente de los equipos y el software, entre otras.

Emergió también una proporción reducida pero relevante de trabajos acerca del profesor de secundaria (cf. Eudave, 2013). En general, se hace referencia a conocimientos endebles sobre los temas matemáticos que enseñan. Sin embargo, un dato que vale destacar aquí es que varios de los estudios buscaron modificar tal estado de cosas ofreciendo cursos, situaciones de aprendizaje y/o acompañamiento a los profesores.

EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Durante este periodo las prioridades temáticas en la educación media superior experimentaron un giro importante. El tema de matemáticas privilegiado fue la geometría, seguida por el álgebra, mientras que el cálculo pasó a un tercer lugar en términos cuantitativos, según informan Solares y Sandoval (2013).

En casi todas las investigaciones sobre procesos de construcción de conceptos propios de este nivel educativo estuvieron presentes las herramientas computacionales. En cálculo estudiaron, entre otros temas, las distintas representaciones de una función y las relaciones entre expresiones algebraicas, tablas y gráficas.

Las investigaciones sobre geometría son especialmente interesantes porque analizaron los procesos de construcción de conceptos y, adicionalmente, los de producción de conjeturas y argumentaciones. Para ello resultaron sumamente útiles los entornos de geometría dinámica, en particular el Cabri-Géomètre.

Una conclusión compartida por varios autores hace referencia a que “El uso de software dinámico puede convertirse en una herramienta poderosa para los estudiantes, haciendo posible que generen representaciones dinámicas de los problemas que les permiten identificar relaciones matemáticas, plantear conjeturas y argumentos matemáticos que den sustento a las conjeturas” (cf. Solares y Sandoval, 2013).

Más robusto que en el periodo anterior es el trabajo sobre los maestros de educación media superior; en conjunto se abordan conocimientos, creencias, prácticas y aspectos afectivos relacionados con la enseñanza de las matemáticas. De nuevo, la tecnología está presente en la mayoría de los estudios. En general, se concluye que: a) Las actividades diseñadas en un ambiente de geometría dinámica pueden propiciar cambios en los esquemas de argumentación tradicionales; b) Los profesores reconocen la relevancia del software dinámico para generar nuevas formas de exploración y reflexión sobre el conocimiento matemático por parte de los estudiantes (cf. Solares y Sandoval, 2013).

Conviene, por último, señalar la emergencia de la probabilidad y la estadística como temas de indagación en bachillerato, y el inicio de la exploración de cuestiones afectivas vinculadas a las matemáticas, cuestiones que –según afirman los autores que indagan sobre este tema– son reconocidas como muy importantes por los profesores, pero de las cuales acaban olvidándose conforme se avanza en los niveles escolares, porque la prioridad está en el “aprendizaje efectivo de las matemáticas”.

EDUCACIÓN SUPERIOR

En este nivel la prioridad temática la mantuvo el cálculo, aunque –como veremos– se observa también una cierta diversificación de los enfoques y trabajos.

En esta década, según lo informa Camarena (2013), los investigadores se preocuparon más que en las pasadas por el aprendizaje de los estudiantes, y menos por conocer y desentrañar a través de enfoques epistemológicos las implicaciones didácticas del conocimiento a enseñar. Gran parte de los trabajos colectados (23 de 51) están centrados en los alumnos.

Son varios los marcos conceptuales que dan sustento a las indagaciones de esta etapa: entre los principales se cuentan la teoría APOE (acción-proceso-objeto-esquema) de E. Dubinsky, y la teoría de los registros de representación semiótica de R. Duval. Un grupo de colegas que estudian la educación superior ha tomado también como referencia la socio-epistemología, orientación desarrollada e impulsada por R. Cantoral y sus colaboradores.

Pero si bien la mayoría de los trabajos están dedicados a las cuestiones mencionadas, como comenté, en el periodo se refleja también una tendencia a diversificar el quehacer investigativo en este nivel educativo: se indagó en torno a las bondades de la modelación matemática, el currículum de carreras no matemáticas, o las formas de contextualizar y presentar las matemáticas en esas carreras.²³ Incluso un trabajo versó sobre la importancia que los estudiantes universitarios conceden a las matemáticas en algunas profesiones, y uno más exploró acerca de la práctica en la enseñanza de la variación hecha por algunos docentes, enfatizando el tipo de explicaciones dadas a los alumnos.

A MANERA DE SÍNTESIS: HACIA UNA CARACTERIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALIZADA EN MÉXICO

CANTIDAD Y CALIDAD DE LAS INVESTIGACIONES

El número de publicaciones recopiladas a partir de 1980 (tabla 3) refleja el avance logrado en el quehacer investigativo. Destaca, por ejemplo, que el número de tesis de doctorado se octuplicó entre la primera y la tercera década estudiadas, y el número de artículos se triplicó.

Tabla 3. Producción de investigación en educación matemática entre 1980 y 2012.*

Periodo	Tesis de doctorado	Artículos	Capítulos de libro	Libros	Total publicaciones o tesis de doctorado
1980-1990	5	53	0	0	58
1991-2000	16	108	16	7	147
2001-2012	42	158	39	6	245
Total tres décadas	63	319	55	13	450

* En esta tabla no se incluyen ponencias porque en el periodo 2001-2012 no se consideraron, puesto que los artículos de investigación, tesis de doctorado, libros o capítulos de libro ya hacían muy robusto el corpus.

²³ En estos rubros son relevantes los trabajos de P. Camarena y de A. Romo Vázquez, así como los de M. Trigueros y sus colegas.

APROXIMACIONES METODOLÓGICAS Y POBLACIONES ESTUDIADAS

Como se habrá advertido, los objetos de estudio y las aproximaciones metodológicas son diversas, y sufren modificaciones de un nivel educativo a otro. La preocupación más psicopedagógica y social, propia de la investigación en educación preescolar y primaria –que ocasionalmente diluye el contenido matemático– se atenúa progresivamente hasta casi desaparecer en la educación superior, donde se privilegia el saber matemático como objeto de investigación, aunque –como se mencionó– en el último periodo analizado se observa cierta tendencia hacia la diversificación, principalmente en los estudios sobre la formación de profesionistas que utilizan matemáticas, el análisis (aún muy escaso) de la enseñanza y el interés de los estudiantes por las matemáticas.

Preeminencia de estudios cualitativos. Un rasgo relevante de la investigación en educación matemática es que, en su gran mayoría, los estudios con referente empírico son de tipo cualitativo, basados en la indagación con pequeños grupos de sujetos. También en la categoría de cualitativos se ubican los estudios sobre las prácticas de enseñanza, generalmente sustentados en análisis de registros de clases y entrevistas a profesores.

Predominio de estudios realizados en la Ciudad de México y con profesores que asisten a eventos de formación. Las poblaciones o grupos estudiados se ubican, en su gran mayoría, en la Ciudad de México, especialmente en escuelas públicas del lugar. Son pocos los estudios que tienen como base poblaciones de otras entidades, o que se ocupan de las escuelas privadas. Así mismo, son excepcionales los trabajos que recopilan información de escuelas ubicadas en diversas regiones del país, o representativas de distintas franjas de la población. Por otra parte, en general, los datos aportados sobre profesores corresponden a docentes que, además de habitar en la Ciudad de México, acuden a eventos de formación o desarrollo profesional.

Incorporación reciente de estudios cuantitativos basados en pruebas estandarizadas y grandes muestras. Una forma de indagar, de reciente emergencia y que llama la atención hacia otras poblaciones fuera de la Ciudad de México, es la que se sustenta en los datos generados mediante aplicación de exámenes estandarizados, nacionales o internacionales, a grandes muestras de estudiantes. El análisis de estos exámenes documenta cómo en los sectores más vulnerables de

la sociedad, los aprendizajes matemáticos escolares que es posible ponderar de esta manera son mucho más limitados que en el resto de la población.

PRINCIPALES LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

La investigación en educación matemática en México ha tenido un desarrollo sostenido, tanto en cantidad como en calidad. Algunas vertientes emergieron en los años ochenta y se han mantenido en constante producción, incluso se han fortalecido; tal es el caso de los estudios sobre el cálculo, el álgebra, las fracciones y la resolución de problemas aritméticos. Cabe abrir un paréntesis para señalar la necesidad de trabajar con más profusión la geometría y la medición, la probabilidad y la estadística, entre otros temas esenciales que hasta ahora han sido poco estudiados.

Ahora bien, las indagaciones en torno al uso de tecnologías computacionales en tanto herramientas para el aprendizaje matemático, especialmente en vinculación con el álgebra y la geometría dinámica, constituyen líneas de importante robustez.

Por otro lado, si consideramos el foco de las investigaciones, la educación de adultos y saberes no escolares, así como el saber de los docentes y sus prácticas, son vertientes que también muestran vigor en la primaria, aunque su número es aún insuficiente.

A lo largo de estas décadas se ha mantenido una línea de enseñanza experimental, cuyo objetivo ha sido la construcción de propuestas y situaciones didácticas, con el fin de analizar su potencial como promotoras de ciertos aprendizajes matemáticos. Este tipo de trabajos, más numerosos en la educación básica, han sido útiles para la concreción de propuestas curriculares promovidas por el Estado mexicano.

Varios de los trabajos de investigación realizados han alcanzado reconocimiento internacional, y algunos otros han ejercido influencia en las definiciones curriculares y los materiales que los estudiantes de nuestro país utilizan para aprender; la influencia también se ha sentido en los procesos de formación de profesores. Se trata, sin duda, de un campo de investigación maduro, condición que no elimina la existencia de debilidades y de huecos por colmar.

EQUILIBRIOS NECESARIOS

México es tierra de contrastes, de diversidades y desigualdades. Los estudios sustentados en exámenes estandarizados y aplicados a grandes muestras de

estudiantes constatan una y otra vez cómo en los sectores más vulnerables de la sociedad, los aprendizajes matemáticos escolares que logran los estudiantes son exiguos. Sin embargo, la diversidad y la desigualdad propias de nuestro país han ocupado poco a los investigadores de la educación matemática. Alienta al respecto la reciente publicación de algunos trabajos sobre la educación matemática inicial de jóvenes y adultos, la telesecundaria o la educación matemática de los niños indígenas.²⁴

Se hacen necesarias más y más profundas reflexiones sobre el tratamiento de éstas y otras diversidades en los salones de clase. Deben ocuparnos las modalidades educativas dirigidas a los sectores de población más marginados: la telesecundaria, los sistemas de escolarización tardía de jóvenes y adultos, o las escuelas multigrado e indígenas. Resulta indispensable delinear y probar propuestas de intervención educativa que contribuyan a paliar los efectos de las condiciones adversas en que aprenden matemáticas quienes asisten a estos servicios educativos.

REFLEXIONES FINALES

En 1975, en un coloquio efectuado en Burdeos, se discutieron los trabajos de Guy Brousseau. Ante la propuesta de los asistentes de llamar “Epistemología experimental” al trabajo realizado, Brousseau contrapuso el título de *Didáctica*, para destacar “el deseo de mejorar la enseñanza, por medio de lo que podemos entender de ella” (cf. Brousseau, 1986: 28). Menciono este hecho porque nos recuerda que la investigación en educación matemática, por su propia naturaleza, tiene como objetivo último contribuir a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En tal sentido es necesario señalar que, a pesar del gran dinamismo de la comunidad de investigadores de la educación matemática y la relevancia de muchas de sus producciones, los alumnos en nuestras escuelas siguen aprendiendo muy pocas matemáticas.

En la última década tomamos conciencia plena del papel protagónico del profesor como mediador entre el conocimiento matemático escolar y los alumnos. Pero las indagaciones sobre la práctica docente indican que las reformas

²⁴ Ejemplo de esto último es el trabajo de J. L. Cortina y G. Rojas (2016) en la *Revista Latinoamericana de Etnomatemática* (la ficha completa aparece en la bibliografía).

educativas implican, las más de las veces, distancias excesivas entre la acción de los docentes y lo que se introduce como innovación. Estas distancias –como Michèle Artigue ha señalado–, al ser enormes, “hacen imposible la asimilación” (Artigue, 2004).

La investigación básica y experimental por supuesto que debe realizarse, de ella derivan posibles avances en nuestras comprensiones del aprendizaje y la enseñanza. De ella han derivado bellas obras didácticas, pero no podemos dedicarnos solamente a construir mundos ideales, menos en un país con tantas desigualdades y carencias educativas como México; también necesitamos orientar nuestras acciones a entender la realidad educativa y lo que esa realidad necesita y puede asimilar, porque se hace indispensable mejorarla.

No es responsabilidad de los investigadores la mejora de todo un sistema educativo, ese es un problema de política educativa, cuya responsabilidad corresponde a los tomadores de decisiones, pero sí es una hipótesis de trabajo compartida que ciertos resultados de investigación, llevados de manera adecuada a las escuelas, contribuirán a mejorar la enseñanza y, por tanto, los aprendizajes de los estudiantes.

El problema reviste una gran complejidad, porque no sólo implica la creación de saberes didácticos útiles para la enseñanza. Las reformas educativas –aun acompañadas de procesos formativos de docentes– han mostrado su limitado y desigual impacto en las prácticas de enseñanza. Se trata, me parece, de examinar las condiciones reales en que se lleva a cabo la enseñanza, las historias profesionales y de formación que hay detrás de la acción docente y las tradiciones, restricciones y exigencias que constituyen la cultura escolar imperante, que se resiste al cambio. Probablemente los enfoques más comprehensivos –que incorporan lo cultural, lo social y lo afectivo en sus acercamientos– ayuden a entender mejor los fenómenos asociados con la permeabilidad del sistema educativo y a producir, en consecuencia, “innovaciones más asimilables”. De este modo tal vez edifiquemos puentes transitables entre los investigadores y quienes debieran ser los principales usuarios de la investigación: los maestros. Quizá también logremos que la enseñanza y los aprendizajes mejoren.

REFERENCIAS

Aguayo, L. M. (2003). Investigaciones sobre el nivel medio superior. En: Avila, A. y E. Mancera (coords.), L. M. Aguayo, D. Block, A. Carvajal, P. Camarena y D. Eudave. El

- campo de la educación matemática, 1993-2001. En: A. López (coord.). *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje I*. México. COMIE/SEP/CESU, pp. 221-263.
- Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica para afrontarlos?. *Educación Matemática*, 16 (3), 5-28.
- Avila, A. (1990). El saber matemático de los analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos* (XX-3), 55-96.
- Avila, A. (coord.), D. Block, A. Carvajal, P. Camarena, D. Eudave, I. Sandoval y A. Solares (2013). La investigación en educación matemática en México: 2002-2011. En: Avila, A., A. Carrasco, A. Gómez-Galindo, M. T. Guerra-Ramos, G. López-Bonilla y J. L. Ramírez (coords.). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México*. México. COMIE/ANUIES, pp. 27-150.
- Avila, A., D. Block y A. Carvajal (2003). Investigaciones sobre educación preescolar y primaria. En: Avila, A. y E. Mancera (coords.), L. M. Aguayo, D. Block, A. Carvajal, P. Camarena y D. Eudave (2003). El campo de la educación matemática, 1993-2001. En: A. López (coord.). *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje I*. México. COMIE/SEP/CESU, pp. 49-151.
- Avila, A., D. Block y A. Carvajal (2013). Investigaciones sobre educación preescolar y primaria. En: Avila, A. (coord.), D. Block, A. Carvajal, P. Camarena, D. Eudave, I. Sandoval y A. Solares (2013). La investigación en educación matemática en México: 2002-2011. En: Avila, A., A. Carrasco, A. Gómez-Galindo, M. T. Guerra-Ramos, G. López-Bonilla y J. L. Ramírez (coords.). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México*. México. COMIE/ANUIES, pp. 35-54.
- Avila, A. y E. Mancera (coords), L. M. Aguayo, D. Block, A. Carvajal, P. Camarena y D. Eudave (2003). El campo de la educación matemática, 1993-2001. En: A. López (coord.). *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje I*. México. COMIE/SEP/CESU, pp. 39-352.
- Block, D. y G. Waldegg (coords.), A. Avila, E. Mancera, T. Rojano, M. Rigo, A. Gallardo, E. Sánchez, P. Morfín, G. Zubieta, C. Acuña y E. Bonilla (1995). Matemáticas. En: Waldegg, G. *Procesos de enseñanza y aprendizaje II*. Col. La Investigación Educativa en los Ochenta, Perspectivas para los Noventa. Consejo Mexicano de Investigación Educativa/Fundación SNTE para la cultura del maestro mexicano. México, pp. 21-130.
- Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Thèse pour obtenir le grade de Docteur d'État*. Francia. Université de Bordeaux I.
- Camarena, P. (2003). Investigación educativa en matemáticas del nivel superior. En: Avila, A. y E. Mancera (coords.), L. M. Aguayo, D. Block, A. Carvajal, P. Camarena y D. Eudave (2003). El campo de la educación matemática, 1993-2001. En: A. López (coord.).

- Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje I*. México. COMIE/SEP/CESU, pp. 275-337.
- Camarena, P. (2013). Investigaciones educativas en matemáticas en el nivel de educación superior. En: Avila, A. (coord.), D. Block, A. Carvajal, P. Camarena, D. Eudave, I. Sandoval y A. Solares (2013). La investigación en educación matemática en México: 2002-2011. En: Avila, A., A. Carrasco, A. Gómez-Galindo, M. T. Guerra-Ramos, G. López-Bonilla y J. L. Ramírez (coords.). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México*. México. COMIE/ANUIES, pp. 95-109.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savante au savoir au savoir enseigné*. Francia. La Pensée Sauvage, Éditions.
- Cortina, J. L. y G. Rojas (2016). Didáctica de los sistemas de numeración de las lenguas indígenas: el diseño de una propuesta para escuelas primarias uni-docentes. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*. Vol. 9, núm. 2, 103-126.
- De Agüero, M. (2006). *El pensamiento práctico de una cuadrilla de pintores*. México, Universidad Iberoamericana/CREFAL.
- Eudave, D. (2003). Investigación educativa en matemáticas. Nivel básico: secundaria. En: Avila, A. y E. Mancera (coords.), L. M. Aguayo, D. Block, A. Carvajal, P. Camarena y D. Eudave (2003). El campo de la educación matemática, 1993-2001. En: A. López (coord.). *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje I*. México. COMIE/SEP/CESU, pp. 221-263.
- Eudave, D. (2013). Investigación educativa en matemáticas. Nivel básico: secundaria. En: Avila, A. (coord.), D. Block, A. Carvajal, P. Camarena, D. Eudave, I. Sandoval y A. Solares (2013). La investigación en educación matemática en México: 2002-2011. En: Avila, A., A. Carrasco, A. Gómez-Galindo, M. T. Guerra-Ramos, G. López-Bonilla y J. L. Ramírez (coords.). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México*. México. COMIE/ANUIES, pp. 57-75.
- Imaz, C. (1985). *Una propuesta didáctica para la integral definida*. PNFP. México. Cuadernos de Investigación, núm. 3.
- Solares, A. e I. Sandoval (2013). Investigaciones sobre educación media superior. En: Avila, A. (coord.), D. Block, A. Carvajal, P. Camarena, D. Eudave, I. Sandoval y A. Solares (2013). La investigación en educación matemática en México: 2002-2011. En: Avila, A., A. Carrasco, A. Gómez-Galindo, M. T. Guerra-Ramos, G. López-Bonilla y J. L. Ramírez (coords.). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México*. México. COMIE/ANUIES, pp. 77-94.
- Solares, D. (2012). Conocimientos matemáticos en situaciones extraescolares. Análisis de un caso en el contexto de los niños y niñas jornaleros migrantes. *Educación Matemática*. 24-1, 5-34, 77-94.

Anexo A.

Temas matemáticos abordados en la investigación en educación matemática. Periodos 1991-2000 y 2001-2012

Cuadro 1. Contenidos matemáticos abordados en las 116 investigaciones de Educación primaria y preescolar recopiladas, 1991-2000.

Números naturales y sus operaciones	Fracciones y sus operaciones	Proporcionalidad	Geometría y medición	Probabilidad	Varios contenidos	General	Total
37	18	7	14	5	4	31	116

Cuadro 2. Contenidos matemáticos abordados en las 80 investigaciones de Educación secundaria recopiladas, 1991-2000.

Aritmética	Aritmética y álgebra	Pre-álgebra y álgebra	Geometría	Probabilidad	Varios contenidos	Total
8	4	37	2	6	23	80

Cuadro 3. Contenidos matemáticos abordados en las 61 investigaciones de Educación media superior recopiladas, 1991-2000.

Cálculo	Álgebra	Razonamiento matemático	Geometría	Probabilidad y estadística	Total
24	12	10	9	6	61

Cuadro 4. Contenidos matemáticos abordados en las 114 investigaciones de Educación superior recopiladas, 1991-2000.

Calculo una variable	Cálculo varias variables	Series	Ecuaciones diferenciales	Análisis avanzado	Variable compleja	Álgebra lineal	Probabilidad	Estadística	General	Diversos temas antecedentes del nivel	Total
50	5	7	11	5	1	6	3	3	13	9	114

Cuadro 5. Contenidos matemáticos abordados en las investigaciones de Educación primaria y preescolar recopiladas, 2001-2012.

	Número	Problemas aditivos	Número y Problemas	Decimales	Fracciones	Proporcionalidad	Probabilidad	Introducción al álgebra	Cálculo de áreas	Información y gráficas	Volumen	Argumentación	General o incluye varios temas
Totales	4	6	7	1	12	8	2	5	3	2	3	1	20

Cuadro 6. Contenidos matemáticos abordados en las investigaciones de Educación secundaria recopiladas, 2001-2012.

Aritmética	Álgebra	Probabilidad y Estadística	Habilidades matemáticas, resolución de problemas	General	Total
7	18	8	14	8	55

Cuadro 7. Contenidos matemáticos abordados en las investigaciones de Educación media superior recopiladas, 2001-2012.

Cálculo	Geometría	Álgebra	Probabilidad y Estadística	Matemáticas en general	Total
11	21	14	3	17	66

Cuadro 8. Contenidos matemáticos abordados en las investigaciones de Educación superior recopiladas, 2001-2012.

Tema de matemáticas	Calculo una variable	Cálculo varias variables	Ecs Difs Ord	Ecs Difs Parc	Serie Fourier	Transf Laplace	Álgebra lineal	Estadística	Variable compleja	Varios	Total
Número de trabajos	11	6	1	1	5	1	4	4	1	17	51

Anexo B.

Principales medios de difusión de la investigación en educación matemática realizada en México

Desde los inicios del campo de la educación matemática en México, la *Revista Educación Matemática* tuvo un papel relevante como difusora de los trabajos que lo iban constituyendo. La mayor parte de los artículos incorporados en el recuento correspondiente a la década de 1980 (31 de 53) fueron difundidos en sus páginas. La presencia de dicha revista ha sido permanente a lo largo de estos años. La *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* juega, así mismo, desde hace más de 15 años un papel muy relevante en la difusión de los trabajos de investigación en educación matemática producidos en México. Ambas revistas constituyen las fuentes principales en la difusión de artículos de investigación en educación matemática durante las últimas décadas. Otras revistas mexicanas, indexadas en el Conacyt, son en menor medida espacios de difusión de las investigaciones en este rubro. Enseguida se inserta la lista de estas revistas, así como el de las revistas extranjeras en las que investigadores mexicanos suelen publicar sus trabajos.

REVISTAS MEXICANAS:

- *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. Consejo Mexicano de Investigación Educativa.
- *Revista Perfiles Educativos*. Centro de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación. UNAM.
- *Revista Electrónica de Investigación Educativa*. Universidad de Baja California.

REVISTAS EXTRANJERAS:

- *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM de Estrasburgo. Francia.

- *Bolema. Boletín de Educación Matemática*. Universidad Estatal de São Paulo. Brasil.
- *Educational Studies in Mathematics*. Springer. Holanda.
- *Enseñanza de las Ciencias*. Universidad Autónoma de Barcelona. España.
- *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Taylor & Francis. Inglaterra.
- *Journal for Research in Mathematics Education*. NCTM. Estados Unidos de América.
- *International Journal of Computers in Mathematics and Technology*. CCC Publications. Agora University. Rumania.
- *Mathematics and Computer Education*. University of New York State. EUA.
- *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas. España.
- PRIMUS. *Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*. Taylor and Francis. Inglaterra.
- *Recherches en Didactique des Mathématiques*. La Pensée Sauvage. Grenoble. Francia.
- *The Journal of Mathematical Behavior*. Elsevier.
- *The Mathematics Enthusiast*. University of Montana. EUA.
- *ZDM Mathematics Education*. Springer. Holanda.